© 2016 г. А.А. ЛАЗАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (*jobmath@mail.ru*)
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва,
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Московский физико-технический институт),
Д.И. АРХИПОВ (*miptrafter@gmail.com*)
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва).

МИНИМИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННО́ГО СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА[1]

Рассматривается классическая NP-трудная задача теории расписаний $1|r_j|L_{\max}$. Представлен алгоритм нахождения оптимального расписания обслуживания n требований (работ), когда параметры требований удовлетворяют системе линейных ограничений. Расширена полиномиально разрешимая область задачи $1|r_j|L_{\max}$. Представлен алгоритм построения Парето-оптимального множества расписаний по критериям $L_{\max}$ и $C_{\max}$ трудоемкости $O(n^3 \log n)$ операций.

1. Введение

Рассматривается следующая задача теории расписаний. Начиная с момента времени t необходимо обслужить требования (работы) множества $N = \{1, \dots, n\}$. Запрещаются прерывания обслуживания требований и одновременное обслуживание нескольких требований.

Для требований множества N введем следующие обозначения: r_j – *момент поступления* требования j, $p_j > 0$ – время, которое требуется для обслуживания требования j, d_j – директивный срок, $j \in N$. *Директивный срок* – время, до которого желательно (но необязательно) завершить обслуживание требования. Обозначим: $r_j(t) = \max\{r_j, t\}$, $j \in N$. *Расписанием* $\pi(N, t)$ будем называть последовательность обслуживания требований множества N

$$\pi(N, t) = (K_1, \dots, K_n),$$

начиная с момента времени t, где $K_1 \cup \dots \cup K_n \equiv N$ и обслуживание требования K_1 начинается в момент времени $s_1 = r_{K_1}(t)$, а всех остальных требований K_j $(j = 2, \dots, n)$ начинается в момент времени $s_{K_j} = r_{K_j}(s_{K_{j-1}} + p_{K_{j-1}})$. Будем называть расписание *допустимым*, если при нем каждое требование $j \in N$ обслуживается без прерываний на протяжении времени p_j, начиная с момента $s_j \geqslant r_j(t)$, и никакие два требования не обслуживаются одновременно. Множество всех допустимых расписаний, которые можно построить для набора требований N и момента времени t, обозначим через

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ОАО «Российские железные дороги» (проект № 13-08-13190).

$\Pi(N,t)$. Для каждого требования $j \in N$ в расписании $\pi \in \Pi(N,t)$ через $C_j(\pi,t)$ будем обозначать время завершения обслуживания j. Разность $L_j(\pi,t) = C_j(\pi,t) - d_j$ называют *временны́м смещением* требования j при расписании π, начинающемся в момент времени t (рис. 1). Максимальное временно́е смещение для требований множества N при расписании π определим как

$$L_{\max}(\pi,t) = \max_{j\in N} C_j(\pi,t) - d_j.$$

Момент окончания обслуживания всех требований множества N при расписании π обозначим как

$$C_{\max}(\pi,t) = \max_{j\in N} C_j(\pi,t).$$

З а д а ч а 1. *Для заданного множества требований N и момента времени t построить расписание $\pi^* \in \Pi(N,t)$, при котором*

$$L_{\max}(\pi^*,t) = \min_{\pi\in\Pi(N,t)} L_{\max}(\pi,t).$$

Данная задача в [1] обозначается как $1|r_j|L_{\max}$ и является классической задачей теории расписаний. В [2] показано, что общий случай задачи $1|r_j|L_{\max}$ является NP-трудным в сильном смысле. С момента постановки задачи был выделен ряд полиномиально разрешимых случаев. В [3] было доказано, что в случае $r_j = 0, j \in N$, решением задачи является расписание, при котором требования упорядочены по неубыванию директивных сроков. Такое расписание также будет оптимальным для случая, когда моменты поступления и директивные сроки согласованы следующим образом: $r_i \leqslant r_j \Leftrightarrow d_i \leqslant d_j, \forall i,j \in N$. В случае, когда $d_j = d$ для всех $j \in N$, оптимальное расписание также может быть построено за $O(n\log n)$ операций, по неубыванию моментов поступления. Полиномиальный алгоритм трудоемкости $O(n^2\log n)$ для случая равенства времен обслуживания требований $p_j = p$ для всех $j \in N$ был представлен в [4]. В [5] предложил полиномиальный алгоритм (трудоемкости $O(n^2\log n)$ операций) для специального случая, когда параметры всех требований $j \in N$ для некоторой константы A удовлетворяют ограничениям

$$d_j - p_j - A \leqslant r_j \leqslant d_j - A, \forall j \in N.$$

Полиномиальный алгоритм трудоемкости $O(n^3\log n)$ операций для случая, когда параметры требований удовлетворяют системе линейных ограничений

$$\begin{cases} d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n; \\ d_1 - p_1 - r_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n - p_n - r_n \end{cases}$$

был представлен в работе автора [6].

2. Свойства задачи

Рассматривается случай, когда параметры требований множества N для некоторых действительных чисел $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$ удовлетворяют системе неравенств

(1) $$\begin{cases} d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n; \\ d_1 - \alpha p_1 - \beta r_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n - \alpha p_n - \beta r_n. \end{cases}$$

Напомним, t – момент времени, начиная с которого прибор доступен для обслуживания требований. Выберем из множества N два требования $f = f(N,t)$ и $s = s(N,t)$, такие что

$$f(N,t) = \arg\min_{j\in N}\{d_j | r_j(t) = \min_{i\in N} r_i(t)\},$$

$$s(N,t) = \arg\min_{j\in N\setminus f}\{d_j | r_j(t) = \min_{i\in N\setminus f} r_i(t)\}.$$

В случае, когда $N = \emptyset$, т.е. $|N| = 0$, для любого действительного t положим

$$f(\emptyset,t) = 0, s(\emptyset,t) = 0.$$

В случае, когда $N = \{i\}$, т.е. $|N| = 1$, для любого действительного t положим

$$f(N,t) = i, s(N,t) = 0.$$

Через $(i \to j)_\pi$ будем обозначать, что требование i обслуживается при расписании π раньше требования j.

Лемма 1. *Если для требований множества N выполнены условия (1) для некоторых $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$, тогда при любом расписании $\pi \in \Pi(N,t)$ для любого требования $j \in N \setminus \{f\}$ такого, что $(j \to f)_\pi$, верно*

$$L_j(\pi,t) < L_f(\pi,t) \tag{2}$$

и для любого требования $j \in N \setminus \{f,s\}$ такого, что $(j \to s)_\pi$, верно

$$L_j(\pi,t) < L_s(\pi,t), \tag{3}$$

где $f = f(N,t)$, $s = s(N,t)$.

Доказательство леммы 1. Для всех работ j таких, что $(j \to f)_\pi$, выполняется неравенство

$$C_j(\pi,t) \leqslant C_f(\pi,t) - p_f.$$

В случае, когда $d_j \geqslant d_f$, имеем

$$L_j(\pi,t) = C_j(\pi,t) - d_j < C_f(\pi,t) - d_f = L_f(\pi,t),$$

следовательно, соотношение (2) выполняется.

Рассмотрим случай, когда для работы $j \in N$, $(j \to f)_\pi$, верно $d_j < d_f$. Из системы (1) имеем

$$d_j < d_f \Leftrightarrow d_j - \alpha p_j - \beta r_j \geqslant d_f - \alpha p_f - \beta r_f.$$

Тогда с учетом того, что $r_j > r_f, \alpha \in [0,1], \beta \in [0,\infty)$ и $p > 0$, получаем следующие соотношения:

$$0 \leqslant \alpha p_j + (1-\alpha)p_f + \beta(r_j - r_f) \Leftrightarrow \alpha p_f + \beta r_f \leqslant \alpha p_j + \beta r_j + p_f.$$

С учетом того, что

$$d_j - \alpha p_j - \beta r_j \geqslant d_f - \alpha p_f - \beta r_f \Leftrightarrow (\alpha p_f + \beta r_f) - (\alpha p_j + \beta r_j) \geqslant d_f - d_j,$$

получаем

$$d_f \leqslant d_j + p_f.$$

Очевидно, что $C_j(\pi,t) \leqslant C_f(\pi,t) - p_f$. Складывая полученные неравенства, получаем

$$C_j(\pi,t) + d_f \leqslant C_f(\pi,t) + d_j \Leftrightarrow L_j(\pi,t) \leqslant L_f(\pi,t).$$

Утверждение (2) доказано.

Доказательство утверждения (3) проводится аналогично. Достаточно заметить, что работа s из множества N станет работой f во множестве $N \setminus \{f\}$ и необходимо только заменить N на $N \setminus \{f\}$.

Докажем следующую теорему о свойствах работ f и s.

Теорема 1. Пусть все работы подмножества $N' \subseteq N$ удовлетворяют системе неравенств (1) для некоторых $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$. Тогда для любого момента времени $t' \geqslant t$ и любого расписания $\pi \in \Pi(N',t')$ существует такое расписание $\pi' \in \Pi(N',t')$, что

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi',t') \leqslant L_{\max}(\pi,t'), \\ C_{\max}(\pi',t') \leqslant C_{\max}(\pi,t') \end{cases} \tag{4}$$

и в расписании π' первой выполняется либо работа $f = f(N',t')$, либо $s = s(N',t')$. Если $d_f \leqslant d_s$, то первой в расписании π' обслуживается работа f.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\pi = (\pi_1, f, \pi_2, s, \pi_3)$, где π_1, π_2, π_3 - частичные подрасписания π. Рассмотрим расписание $\pi' = (f, \pi_1, \pi_2, s, \pi_3)$. Из определений $r_j(t)$ и $f(N,t)$ для каждого требования $j \in N'$ имеем

$$r_f(t') \leqslant r_j(t').$$

Следовательно,

$$C_{\max}((f,\pi_1),t') \leqslant C_{\max}((\pi_1,f),t'),$$
$$C_{\max}(\pi',t') \leqslant C_{\max}(\pi,t'),$$

поэтому

$$L_j(\pi',t') \leqslant L_j(\pi,t'), \forall j \in (\pi_2, s, \pi_3).$$

Из леммы 1 получаем, что для любого $j \in \{\pi_1\} \cup \{\pi_2\}$ выполняется

$$L_j(\pi',t') \leqslant L_s(\pi,t').$$

Для f, очевидно, имеем

$$L_f(\pi',t') \leqslant L_f(\pi,t').$$

Из этих утверждений следует

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi',t') \leqslant L_{\max}(\pi,t'), \\ C_{\max}(\pi',t') \leqslant C_{\max}(\pi,t'). \end{cases}$$

Пусть $\pi = (\pi_1, s, \pi_2, f, \pi_3)$, т.е. работа s выполняется до работы f. В этом случае строим расписание $\pi' = (s, \pi_1, \pi_2, f, \pi_3)$ и повторяем доказательство аналогично приведенному выше. Первая часть теоремы доказана.

Положим $d_f \leqslant d_s$ и $\pi = (\pi_1, s, \pi_2, f, \pi_3)$. Рассмотрим расписания $\pi' = (s, \pi_1, \pi_2, f, \pi_3)$ и $\pi'' = (f, \pi_1, \pi_2, s, \pi_3)$. Тогда для расписаний π, π' и π'' будет верно следующее неравенство:

$$C_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t') \leqslant C_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t'),$$

так как $r_f(t') \leqslant r_s(t')$. Следовательно,

$$L_{\max}(\pi_3, C_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t')) \leqslant L_{\max}(\pi_3, C_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t')),$$

поэтому максимум целевой функции $L_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t')$ достигается не на требовании f. Максимум целевой функции $L_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t')$ не может достигаться на требовании s, так как $d_f \leqslant d_s$ и $C_s((s, \pi_1, \pi_2, f), t') < C_f((s, \pi_1, \pi_2, f), t')$. Тогда согласно лемме 1

$$L_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t') = L_s((f, \pi_1, \pi_2, s), t') = C_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t') - d_s$$

и

$$L_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t') = L_f((s, \pi_1, \pi_2, f), t') = C_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t') - d_f.$$

Таким образом, из того, что $d_f \leqslant d_s$ и $C_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t') \leqslant C_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t')$, получаем

$$L_{\max}((f, \pi_1, \pi_2, s), t') \leqslant L_{\max}((s, \pi_1, \pi_2, f), t')$$

и

$$L_{\max}(\pi'', t') \leqslant L_{\max}(\pi', t'),$$

что и требовалось доказать.

Будем называть расписание $\pi' \in \Pi(N, t)$ *эффективным*, если не существует такого расписания $\pi \in \Pi(N, t)$, что выполняется система неравенств

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi, t) \leqslant L_{\max}(\pi', t), \\ C_{\max}(\pi, t) \leqslant C_{\max}(\pi', t), \end{cases}$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Тогда если для работ множества N система неравенств (1) верна при некоторых $\alpha \in [0, 1]$ и $\beta \in [0, +\infty)$, то из теоремы 1 следует, что существует эффективное расписание π', при котором либо работа $f = f(N, t)$, либо $s = s(N, t)$ выполняется первой. Более того, если $d_f \leqslant d_s$, то существует оптимальное расписание, при котором первой выполняется работа f.

Пусть $\Omega(N, t)$ – подмножество множества $\Pi(N, t)$. Расписание $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ принадлежит $\Omega(N, t)$, если любая работа i_k, $k = 1, \ldots, n$, выбрана из

$$f_k = f(N_{k-1}, C_{i_{k-1}}(\pi, t))$$

и

$$s_k = s(N_{i_{k-1}}, C_{i_{k-1}}(\pi, t)),$$

где $N_{k-1} = N \setminus \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$, $N_0 = N$ и $C_{i_0}(\pi, t) = t$. Если $d_{f_k} \leqslant d_{s_k}$, то $i_k = f_k$. Если $d_{f_k} > d_{s_k}$, тогда либо $i_k = f_k$, либо $i_k = s_k$. Так как на каждое место в расписании претендует не более двух работ, следовательно, множество $\Omega(N, t)$ содержит не более чем 2^n расписаний. Согласно теореме 1 всегда можно построить эффективное расписание, которое принадлежит множеству $\Omega(N,t)$, перебрав не более чем 2^n вариантов.

Пусть $\omega(N,t)$ – частичное расписание максимальной длины такое, что при последовательном рассмотрении требований имеем $d_f \leqslant d_s$. С помощью алгоритма 1 для любого набора работ N и времени t можно построить расписание $\omega(N,t)$.

Алгоритм 1

Data: N, t
Result: $\omega(N,t)$
1 $N' := N$;
2 $t' := t$;
3 $f := f(N',t')$;
4 $s := s(N',t')$;
5 **if** $d_f \leqslant d_s$ **then**
6     $\omega = (\omega, f)$;
7 **else**
8   *return*(ω);
9 **end**
10 $N' := N' \setminus f$;
11 $t' := r_f(t') + p_f$;
12 **if** $N \neq \emptyset$ **then**
13   *go to step 3;*
14 **else**
15   *return*(ω);
16 **end**

Алгоритм 1 заключается в следующем: на каждом проходе цикла 5-13 рассматриваются требования $f(N',t')$ и $s(N',t')$. В случае, если $d_f \leqslant d_s$, требование $f(N',t')$ при расписании ω обслуживается с момента времени $r_f(t')$ до момента времени $r_f(t') + p_f$. Выполняется исключение требования $f(N',t')$ из множества N', изменение $t' := r_f(t') + p_f$, после чего выполнение цикла повторяется. Если же $d_f > d_s$, то алгоритм прерывает свою работу и выводит построенное частичное расписание $\omega(N,t)$ (рис. 2). В случае, когда $d_f > d_s, f = f(N,t), s = s(N,t)$, то $\omega(N,t) = \emptyset$.

Лемма 2. Трудоемкость построения частичного расписания $\omega(N,t)$ алгоритмом 1 для любых N и t составляет не более чем $O(n \log n)$ операций.

Доказательство леммы 2. На шагах 3-4 алгоритма 1 находятся две работы $f(N',t')$ и $s(N',t')$. Так как работы отсортированы в соответствии с моментами поступления r_j, то для нахождения работ f и s потребуется не более чем $O(\log n)$ операций. Ввиду того, что количество проходов цикла 3-13 ограничено мощностью множества N, получаем, что для построения частичного расписания $\omega(N,t)$ потребуется не более чем $O(n \log n)$ операций.

Лемма 3. Если работы множества N удовлетворяют условиям (1) для некоторых $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$, то любое расписание $\pi \in \Omega(N,t)$ начинается с частичного расписания $\omega(N,t)$.

Доказательство леммы 3. Если $\omega(N,t) = \emptyset$, то условие леммы выполняется ввиду того, что любое расписание начинается с пустого расписания. Если же $\omega(N,t) = (i_1,\ldots,i_l)$, то для любого $k = 1,\ldots,l$ выполнено $d_{f_k} \leqslant d_{s_k}$, где $f_k =$

$f(N_{k-1}, C_{k-1}(\pi, t))$ и $s_k = s(N_{k-1}, C_{k-1}(\pi, t))$. В то же время для $f = f(N_l, C_l(\pi, t))$ и $s = s(N_l, C_l(\pi, t))$ имеем $d_f > d_s$. Ввиду полученных соотношений между директивными сроками и определением $\Omega(N, t)$ получаем, что любое расписание из $\Omega(N, t)$ начинается с $\omega(N, t)$, что и требовалось доказать.

Будем обозначать: $\omega^1(N, t) = (f(N, t), \omega(N \setminus f, t'))$ и $\omega^2(N, t) = (s(N, t), \omega(N \setminus s, t''))$, где $t' = r_f(t) + p_f$ и $t'' = r_s(t) + p_s$. Заметим, что из определения $\omega^1(N, t)$ и $\omega^2(N, t)$ и леммы 2 следует, что для их нахождения также потребуется $O(n \log n)$ операций.

Следствие 1. *Если работы множества N удовлетворяют условиям (1) для некоторых $\alpha \in [0, 1]$ и $\beta \in [0, +\infty)$, то любое расписание $\pi \in \Omega(N, t)$ начинается либо с $\omega^1(N, t)$, либо с $\omega^2(N, t)$.*

3. Задача на быстродействие с ограничением на максимальное временно́е смещение

Задача 2. *Упорядочить множество требований N с момента времени t так, чтобы максимальное временно́е смещение не превышало значения y. Требуется найти оптимальное расписание, удовлетворяющее*

$$\min_{\pi \in \Pi(N,t)} C_{\max}(\pi, t) | L_{\max}(\pi, t) \leqslant y.$$

Расписание, удовлетворяющее данной целевой функции, обозначим через $\Theta(N, t, y)$. В случае, если не существует такого расписания $\pi \in \Pi(N, t)$, будем говорить, что $\Theta(N, t, y) = \emptyset$.

Представим алгоритм построения расписания $\Theta(N, t, y)$.

Алгоритм 2

Data: N, t, y
Result: $\Theta(N, t, y)$
$\Theta := \omega(N, t)$;
if $L_{\max}(\omega(N, t), t) > y$ **then**
  return$(\emptyset)$;
end
while *1* **do**
  $N' := N \setminus \Theta$;
  $t' := C_{\max}(\Theta, t)$;
  if $N' = \emptyset$ **then**
    return(Θ);
  end
  if $L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') \leqslant y$ **then**
    $\Theta := (\Theta, \omega^1(N', t'))$;
  else
    if $L_{\max}(\omega^2(N', t'), t') \leqslant y$ **then**
      $\Theta := (\Theta, \omega^2(N', t'))$;
    else
      return$(\emptyset)$;
    end
  end
end

На первом шаге алгоритма выполняется построение частичного расписания $\omega(N,t)$, включение его в $\Theta(N,t,y)$, изменение $N' := N' \setminus \Theta$ и $t' := C_{\max}(\Theta,t)$. Далее выполняется построение частичного расписания $\omega^1(N',t')$ и проверка выполнения ограничения $L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') \leqslant y$. В случае положительного результата $\omega^1(N',t')$ добавляется к расписанию $\Theta(N,t,y)$. Затем происходит изменение N' и t', после чего цикл 5-20 повторяется. В противном случае выполняется построение частичного расписания $\omega^2(N',t')$ и проверка выполнения ограничения $L_{\max}(\omega^2(N',t'),t') \leqslant y$. В случае положительного результата $\omega^2(N',t')$ добавляется к расписанию $\Theta(N,t,y)$, выполняются изменения N' и t', после чего процедура повторяется (рис. 3). Алгоритм прерывает свою работу, если все требования множества N успешно включены в расписание Θ или если на каком-то шаге оба расписания $\omega^1(N',t')$ и $\omega^2(N',t')$ не удовлетворяют ограничению на максимальное временно́е смещение. В этом случае алгоритм возвращает $\Theta(N,t,y) = \emptyset$.

Лемма 4. *Трудоемкость алгоритма 2 не превосходит $O(n^2 \log n)$ операций.*

Доказательство леммы 4. На шагах 1, 11 и 14 алгоритма 2 выполняется построение расписаний $\omega^1(N',t')$ и $\omega^2(N',t')$ с помощью алгоритма 1. Для этого требуется не более чем $O(n \log n)$ операций. В результате прохода цикла 4 - 19 добавляется хотя бы одно требование к расписанию Θ или возвращается $\Theta = \emptyset$, следовательно, цикл 4-19 повторяется не более чем n раз. Поэтому алгоритм 2 находит расписание $\Theta(N,t,y)$ не более чем за $O(n^2 \log n)$ операций.

Докажем теорему о свойствах построенного расписания $\Theta(N,t,y)$.

Теорема 2. *Пусть для работ множества N выполнены условия (1) для некоторых $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$. Тогда если расписание $\Theta(N,t,y)$, найденное с помощью алгоритма 2, не пустое, то для любого расписания $\pi \in \Pi(N,t)$, удовлетворяющего ограничению $L_{\max}(\pi,t) \leqslant y$, выполнено*

$$C_{\max}(\Theta(N,t,y),t) \leqslant C_{\max}(\pi,t).$$

Если же $\Theta(N,t,y) = \emptyset$, то для любого расписания $\pi \in \Pi(N,t)$ верно

$$L_{\max}(\pi,t) > y.$$

Доказательство теоремы 2. Так как для любого $\pi \in \Pi(N,t)$ выполнены условия (1), то по теореме 1 существует такое расписание $\pi' \in \Omega(N,t)$, для которого

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi',t) \leqslant L_{\max}(\pi,t), \\ C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi,t). \end{cases}$$

Из построения расписания $\Theta(N,t,y)$ следует, что оно принадлежит множеству $\Omega(N,t)$. Тогда из леммы 3 следует, что расписание $\Theta(N,t,y)$ будет начинаться с частичного расписания $\omega(N,t)$. Обозначим $\Theta_0 = \omega(N,t)$.

После k проходов цикла 4-19 получим частичное расписание Θ_k, при этом $N' = N \setminus \{\Theta_k\}$ и $t' = C_{\max}(\Theta_k,t)$. Допустим, что существует расписание Θ с минимальным значением $C_{\max}$, начинающееся с частичного расписания Θ_k и удовлетворяющее ограничению $L_{\max}(\Theta_k,t) \leqslant y$. Тогда по лемме 3 можно продолжить Θ_k расписанием из множества $\Omega(N',t')$. Возможны три случая.

1. Пусть $\Theta_{k+1} = (\Theta_k, \omega^1(N', t'))$, т.е. $L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') \leqslant y$, тогда $\omega^1(N', t')$ – частичное расписание с наименьшим значением $C_{\max}$ среди всех возможных продолжений расписания Θ_k, удовлетворяющих $L_{\max}(\Theta_{k+1}, t) \leqslant y$.

2. Если $\Theta_{k+1} = (\Theta_k, \omega^2(N', t'))$, то

$$\begin{cases} L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') > y, \\ L_{\max}(\omega^2(N', t'), t') \leqslant y. \end{cases}$$

   Это следует из того, что любое расписание из множества $\Omega(N', t')$ может начинаться либо с $\omega^1(N', t')$, либо с $\omega^2(N', t')$ и $L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') > y$. Из шагов 11-13 следует, что данный случай возможен, только если $\omega^2(N', t')$ – единственное возможное продолжение расписания Θ_k.

3. Рассмотрим теперь случай, когда после k прохода цикла 4-19 имеем $L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') > y$ и $L_{\max}(\omega^2(N', t'), t') > y$. Из предположения следует, что если расписание $\Theta \in \Omega(N, t)$ существует, то оно обязательно должно начинаться с Θ_k. Кроме того, для любого $\pi \in \Pi(N', t')$ всегда существует $\pi' \in \Omega(N', t')$ такое, что либо

$$L_{\max}(\pi, t') \geqslant L_{\max}(\pi', t') \geqslant L_{\max}(\omega^1(N', t'), t') > y,$$

   либо

$$L_{\max}(\pi, t') \geqslant L_{\max}(\pi', t') \geqslant L_{\max}(\omega^2(N', t'), t') > y.$$

   Следовательно, $\Theta = \emptyset$.

Таким образом, после не более чем n проходов цикла 4-19 будет построено искомое расписание $\Theta(N, t, y)$. Если хоть раз возникнет случай 3, расписания $\Theta(N, t, y)$ не существует. Что и требовалось доказать.

4. Алгоритм построения множества оптимальных по Парето расписаний по критериям $C_{\max}$ и $L_{\max}$

Ниже представлен алгоритм, в результате работы которого для любого набора работ N и момента времени t может быть получено Парето-множество расписаний $\Phi(N, t)$ такое, что $1 \leqslant |\Phi(N, t)| \leqslant n$. В случае, когда выполняется условие 1, будет построено оптимальное Парето-множество.

Алгоритм 3

```
   Data: N, t
   Result: Φ(N, t)
1  y := +∞;
2  π* := ω(N, t);
3  Φ := ∅;
4  m := 0;
5  while 1 do
6      N' := N \ π*;
7      t' := C_max(π*, t);
8      if N' = ∅ then
9          Φ := Φ ∪ {π*};
10         return(Φ);
11     end
12     if L_max(ω^1(N', t'), t') ⩽ L_max(π*, t) then
13         π* := (π*, ω^1(N', t'));
14     else
15         if L_max(ω^1(N', t'), t') ⩽ y then
16             y' := L_max(ω^1(N', t'), t');
17             Θ := Θ(N', t', y');
18             if Θ = ∅ then
19                 π* := (π*, ω^1(N', t'));
20             else
21                 π' := (π*, Θ);
22                 if (m = 0) or (C_max(π'_m, t) < C_max(π', t)) then
23                     m := m + 1;
24                     π'_m := π';
25                     Φ := Φ ∪ {π'_m};
26                     y := L_max(π'_m, t);
27                 else
28                     π'_m := π';
29                 end
30             end
31         else
32             if L_max(ω^2(N', t'), t') ⩽ y then
33                 π* := (π*, ω^2(N', t'));
34             else
35                 π* := π'_m;
36                 return(Φ).
37             end
38         end
39     end
40 end
```

Процесс работы алгоритма 3 заключается в следующем. Из леммы 3 следует, что любое оптимальное по критерию $L_{\max}$ расписание из $\Omega(N,t)$ начинается с $\omega(N,t)$, поэтому обозначим $\pi_0 = \omega(N,t)$ и рассмотрим работу цикла 5-40. Пусть после первых k проходов цикла 5-40 алгоритма 3 будет построено частичное расписание $\pi^* = \pi_k$ и множество $\Phi = \{\pi'_1, \ldots, \pi'_m\}$. Пусть $N' = N \setminus \{\pi_k\}$ и $t' = C_{\max}(\pi_k, t)$ – значения, полученые на шагах 5 и 6 во время $(k+1)$-го прохода цикла 5-40. Рассмотрим возможные продолжения расписания π_k.

1. Если $L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') \leqslant L_{\max}(\pi_k,t)$, то выполняется присвоение $\pi^* := \pi_{k+1} = (\pi_k, \omega^1(N',t'))$ и возврат на шаг 5 после выбора оптимального продолжения по критерию $C_{\max}$ без нарушения текущего значения целевой функции $L_{\max}(\pi_{k+1},t) \leqslant L_{\max}(\pi_k,t)$.

2. $L_{\max}(\pi_k,t) < L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') \leqslant y$ и расписание $\Theta(N',t',L_{\max}(\omega^1(N',t'),t')) = \emptyset$. В этом случае выполняется присвоение $\pi^* := \pi_{k+1} = (\pi_k, \omega^1(N',t'))$ и возврат на шаг 5 после выбора оптимального продолжения по критерию $C_{\max}$ без нарушения ограничения $L_{\max}(\pi_{k+1},t) \leqslant y$.

3. $L_{\max}(\pi_k,t) < L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') \leqslant y$ и $\Theta(N',t',L_{\max}(\omega^1(N',t'),t')) \neq \emptyset$. Выполняется присвоение $\pi' := (\pi^*, \Theta(N',t',L_{\max}(\omega^1(N',t'),t')))$. Так как $y' \leqslant y$, то расписание π' удовлетворяет ограничению $L_{\max}(\pi_{k+1},t) \leqslant y$. Если значение $C_{\max}(\pi',t)$ увеличилось по сравнению с $C_{\max}(\pi'_m,t)$, то увеличивается счетчик $m := m+1$, выполняется включение π' во множество Φ и изменение ограничения y (шаги 23-26). Если же имеем $C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi'_m,t)$, то заменяем расписание π'_m на π' во множестве Φ (шаг 28). После любого из возможных исходов выполняется возврат на шаг 5.

4. $L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') > y$, $L_{\max}(\omega^2(N',t'),t') \leqslant y$. Выполняется присвоение $\pi^* := \pi_{k+1} = (\pi_k, \omega^2(N',t'))$ – единственный возможный вариант продолжения π_k без нарушения ограничения $L_{\max}(\pi_{k+1},t) \leqslant y$ (шаг 33). После чего выполняется переход на шаг 5.

5. $L_{\max}(\omega^1(N',t'),t') > y$, $L_{\max}(\omega^2(N',t'),t') > y$. Нет возможности продолжить расписание π_k, не нарушая ограничения $L_{\max}(\pi_{k+1},t) \leqslant y$. Выполнение алгоритма прерывается (шаг 36). Алгоритм завершает свою работу, если все требования множества N включены в расписание π^* или если нет возможности продолжить расписание π^*, не нарушая ограничения y (шаг 36).

Лемма 5. Время работы алгоритма 3 не превосходит $O(n^3 \log n)$ операций, а мощность множества $\Phi(N,t)$ не превышает n.

Доказательство леммы 5. Наиболее трудоемкими операциями при проходе цикла 5-40 являются построения частичных расписаний $\omega^1(N',t')$ и $\omega^2(N',t')$ и Θ. Для нахождения $\omega^1(N',t')$ и $\omega^2(N',t')$ требуется $O(n \log n)$ операций, а для нахождения расписания Θ – $O(n^2 \log n)$ операций. Так как частичные расписания $\omega^1(N',t')$ и $\omega^2(N',t')$ состоят не менее чем из одной работы, то при каждом проходе цикла к частичному расписанию π^* добавляется не менее одной работы, а во множество $\Phi(N,t)$ включается не более одного расписания. Следовательно, число проходов цикла 5-40 алгоритма 3 будет не более чем n. Т.о., мощность множества $\Phi(N,t)$ не превосходит n и общее количество операций не превышает $O(n^3 \log n)$.

Теорема 3. Пусть для работ множества N выполнены условия (1) для некоторых $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,+\infty)$. Тогда расписание π^*, построенное алгоритмом 3, оптимально по критерию $L_{\max}$.

Для любого расписания $\pi \in \Pi(N,t)$ существует такое $\pi' \in \Phi(N,t)$, что

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi',t) \leqslant L_{\max}(\pi,t), \\ C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi,t) \end{cases}$$

и множество расписаний $\Phi(N,t)$ оптимально по Парето в соответствии с критериями $L_{\max}$ и $C_{\max}$.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что существует расписание $\pi \in \Pi(N,t)$, которое не принадлежит $\Phi(N,t)$ и для которого выполнено хотя бы одно из неравенств

$$C_{\max}(\pi,t) < C_{\max}(\pi',t) \tag{5}$$

или

$$L_{\max}(\pi,t) < L_{\max}(\pi',t) \tag{6}$$

для любого расписания $\pi' \in \Phi(N,t)$. Согласно теореме 1 существует расписание $\pi'' \in \Omega(N,t)$ такое, что

$$\begin{cases} L_{\max}(\pi'',t) \leqslant L_{\max}(\pi,t), \\ C_{\max}(\pi'',t) \leqslant C_{\max}(\pi,t). \end{cases}$$

Если $\pi'' \in \Phi(N,t)$, тогда очевидно, что ни одно из условий (5) и (6) не может быть выполнено. Следовательно, $\pi'' \in \Omega(N,t) \setminus \Phi(N,t)$.

Из определения множества $\Omega(N,t)$ следует, что любое расписание π'' из множества $\Omega(N,t)$ может быть представлено в виде объединения частичных расписаний $\pi'' = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k''})$, где $\omega_0 = \omega(N,t)$, а ω_i – либо $\omega^1(N''_i, C''_i)$, либо $\omega^2(N''_i, C''_i)$ и $N''_i = N \setminus \{\omega_0, \dots, \omega_{i-1}\}$, $C''_i = C_{\max}((\omega_0, \dots, \omega_{i-1}), t)$, $i = 1, \dots, k''$.

Расписание π' имеет аналогичную структуру, т.к. $\Phi(N,t) \subseteq \Omega(N,t)$, т.е. $\pi' = (\omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_{k'})$, где $\omega'_0 = \omega(N,t)$, а ω'_i – либо $\omega^1(N'_i, C'_i)$, либо $\omega^2(N'_i, C'_i)$ и $N'_i = N \setminus \{\omega'_0, \dots, \omega'_{i-1}\}$, $C'_i = C_{\max}((\omega'_0, \dots, \omega'_{i-1}), t)$, $i = 1, \dots, k'$.

Допустим, что первые k частичных расписаний в π' и π'' совпадают, т.е. $\omega'_i = \omega_i$ $\forall i = 0, \dots, k-1$, и $\omega'_k \neq \omega_k$. Положим, $y = L_{\max}(\omega_0, \dots, \omega_{k-1}, t)$, $N_k = N'_k = N''_k$ и $C_k = C'_k = C''_k$. Построим расписание $\Theta = \Theta(N_k, C_k, y)$ с помощью алгоритма 2. Если $\Theta = \emptyset$, то по алгоритму 3 имеем: $\omega'_k = \omega^1(N_k, C_k)$. Так как $\omega_k \neq \omega'_k$, получаем, что $\omega_k = \omega^2(N_k, C_k)$. Условие $L_{\max}(\omega^2(N_k, C_k), C_k) \leqslant y$ не может быть выполнено, так как $\Theta = \emptyset$. Вся структура алгоритма 3 построена на том, чтобы расположить работы так плотно, как это возможно, пока не встретится работа с критическим значением $L_{\max}$. Следовательно, продолжая частичное расписание $\omega^1(N_k, C_k)$, имеем

$$\begin{cases} C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi'',t), \\ L_{\max}(\pi',t) \leqslant L_{\max}(\pi'',t). \end{cases}$$

В том случае, когда $\Theta \neq \emptyset$, для расписания $\pi' = (\omega'_0, \dots, \omega'_k, \Theta)$ имеем

$$\begin{cases} C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi'',t), \\ L_{\max}(\pi',t) = L_{\max}(\pi'',t). \end{cases}$$

Следовательно, для любого расписания $\pi'' \in \Omega(N,t) \setminus \Phi(N,t)$ существует такое расписание $\pi' \in \Phi(N,t)$, что $C_{\max}(\pi',t) \leqslant C_{\max}(\pi'',t)$ и $L_{\max}(\pi',t) \leqslant L_{\max}(\pi'',t)$.

Для множества расписаний $\Phi(N,t) = \{\pi'_1, \ldots, \pi'_m\}$ имеем (рис. 4):

$$\begin{cases} C_{\max}(\pi'_1,t) < C_{\max}(\pi'_2,t) < \cdots < C_{\max}(\pi'_m,t), \\ L_{\max}(\pi'_1,t) > L_{\max}(\pi'_2,t) > \cdots > L_{\max}(\pi'_m,t). \end{cases} \tag{7}$$

Следовательно, $\Phi(N,t)$ – оптимальное по Парето множество расписаний, причем по лемме 5 имеем $|\Phi(N,t)| \leqslant n$. Таким образом, получаем, что расписание π'_1 оптимальное по критерию $C_{\max}$, в то время как расписание π'_m имеет наилучшее значение максимального временнóго смещения $L_{\max}$. Что и требовалось доказать.

5. Проверка принадлежности примера полиномиально разрешимой области

Для произвольного примера задачи $1|r_j|L_{\max}$ необходимо знать, можно ли подобрать такие значения α и β, что система неравенств (1) будет верной. Для этого необходимо и достаточно решить следующую задачу.

З а д а ч а 3. *Дано* $3n$ *действительных чисел:* $r_1, \ldots, r_n, d_1, \ldots, d_n, p_1, \ldots, p_n$. *Существуют ли такие действительные числа* $\alpha \in [0,1]$ *и* $\beta \in [0, +\infty)$, *что выполняется система неравенств (1)?*

Известно, что $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Сделаем замены:

$$D_i = d_{i+1} - d_i,$$

$$P_i = p_{i+1} - p_i,$$

$$R_i = r_{i+1} - r_i.$$

Тогда система неравенств (1) примет вид

$$\begin{cases} D_1 \geqslant 0, \\ \ldots \\ D_{n-1} \geqslant 0, \\ \alpha P_1 + \beta R_1 \geqslant D_1, \\ \ldots \\ \alpha P_{n-1} + \beta R_{n-1} \geqslant D_{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Т е о р е м а 4. *Для набора* $r_1, \ldots, r_n, d_1, \ldots, d_n, p_1, \ldots, p_n$ *существуют* $\alpha_0 \in [0,1]$ *и* $\beta_0 \in [0, +\infty)$ *такие, что система неравенств (8) выполняется тогда и только тогда, когда существуют* $\alpha_1 \in \{0,1\}$ *и* $\beta_1 \in [0, +\infty)$, *для которых система (8) выполняется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Рассмотрим возможные варианты неравенств системы (8) (рис.5). Пусть $M = \{1, \ldots, n-1\}$ – множество индексов, используемых в системе (8). Представим M в виде объединения подмножеств $M^1 \cup \cdots \cup M^7$ в зависимости от значений P_i и R_i в соответствии с правилами, описанными ниже.

1. Если для $i \in M$ выполняется $P_i = 0, R_i = 0$, то $i \in M^1$. Тогда неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ будет выполнено для любых значений α и β при $D_i = 0$ и не будет выполнено при $D_i > 0$.

2. Если для $i \in M$ выполняется $P_i = 0, R_i \neq 0$, то $i \in M^2$. В этом случае неравенство имеет вид $\beta R_i \geqslant D_i \Leftrightarrow \beta \geqslant \frac{D_i}{R_i}$. Обозначим $\min\limits_{i \in M^2} \frac{D_i}{R_i}$ через $\frac{D^2}{R^2}$. Тогда неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ выполняется тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \frac{D^2}{R^2}$.

3. Если для $i \in M$ выполняется $P_i \neq 0, R_i = 0$, то $i \in M^3$. В этом случае неравенство имеет вид $\alpha P_i \geqslant D_i \Leftrightarrow \alpha \geqslant \frac{D_i}{P_i}$. Обозначим $\min\limits_{i \in M^3} \frac{D_i}{P_i}$ через $\frac{D^3}{P^3}$. Тогда неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ выполняется при всех значениеях $\alpha \geqslant \frac{D^3}{R^3}$ и только при них.

4. Если для $i \in M$ выполняется $P_i < 0, R_i < 0$, то $i \in M^4$. В этом случае решение существует тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, если $M^4 \neq \emptyset$, то $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ – единственные возможные коэффициенты, при которых (8) имеет решение.

5. Если для $i \in M$ выполняется $P_i > 0, R_i < 0$, то $i \in M^5$. Тогда
$$P_i + \beta R_i \geqslant \alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i,$$
$$\frac{D_i - P_i}{R_i} \geqslant \beta \geqslant 0.$$
Заметим, что неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ будет выполняться при $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant \frac{D_i - P_i}{R_i}$. Обозначим: $B = \min\limits_{i \in M^5} \frac{D_i - P_i}{R_i}$. Заметим, что $B \geqslant 0$ и для любых $i \in M^5$ неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ будет выполнено при $\alpha = 1$ и $\beta \in [0, B]$.

6. Если для $i \in M$ выполняется $P_i < 0, R_i > 0$, то $i \in M^6$.

7. Если для $i \in M$ выполняется $P_i > 0, R_i > 0$, то $i \in M^7$.

Заметим, что рассмотрены все возможные пары значений P_i и R_i, откуда следует, что $M \equiv M^1 \cup \dots \cup M^7$. Предположим, что существуют такие $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$, что система (8) верна.

Если $M^1 \neq \emptyset$, то для любого $i \in M^1$ верно неравенство $\alpha_0 P_i + \beta_0 R_i \geqslant D_i \Leftrightarrow 0 \geqslant D_i$, следовательно, данное неравенство будет выполнено для всех $\alpha \in [0, 1]$ и $\beta \in [0, +\infty)$.

Если $M^3 \neq \emptyset$, то для любого $i \in M^3$ неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ верно тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \frac{D_0^3}{P_0^3}$. Следовательно, если неравенство имеет решение при некотором $\alpha_0 \in [0, 1]$, то при $\alpha_1 = 1 \geqslant \alpha_0 \geqslant \frac{D_0^3}{P_0^3}$ данное неравенство также будет верно для всех $i \in M^3$.

Если $M^4 \neq \emptyset$, то единственное возможное решение системы (8) – это $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$. Следовательно система (8) верна при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Пусть $M^5 \neq \emptyset$. Покажем, что неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ может быть выполнено для всех $i \in M^2 \cup M^5 \cup M^6 \cup M^7$ при некоторых $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда оно будет выполнено при $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = B$. Для $i \in M^5$ данное утверждение очевидно.

Если $M^5 \neq \emptyset$ и $M^2 \neq \emptyset$, то выполняется $\beta_0 \geqslant \frac{D^2}{R^2}$. Заметим, что так как $M^5 \neq \emptyset$, то $B \geqslant \beta_0$, следовательно, неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ будет выполнено для всех $i \in M^2 \cup M^5$.

Если $M^5 \neq \emptyset$ и $M^6 \neq \emptyset$, то для любых $i \in M^5$ и $j \in M^6$ выполнены неравенства $\alpha_0 P_i + \beta_0 R_i - D_i \geqslant 0$ и $\alpha_0 P_j + \beta_0 R_j - D_j \geqslant 0$. Возьмем $i = \arg\min\limits_{i \in M^5} \frac{D_i - P_i}{R_i}$. Имеем

$$\frac{D_i - \alpha_0 P_i}{R_i} \geqslant \beta_0 \geqslant \frac{D_j - \alpha_0 P_j}{R_j} \Rightarrow (\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j}) - \alpha_0(\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) \geqslant 0.$$

Так как $R_i < 0$ и $R_j > 0$, то

$$\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j} < 0 \Rightarrow \alpha_0(\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) > 0.$$

следовательно,

$$(\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j}) - (\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) \geqslant 0,$$

т.е.

$$B = \frac{D_i - P_i}{R_i} \geqslant \frac{D_j - P_j}{R_j},$$

$$P_j + BR_j \geqslant D_j.$$

Таким образом, получаем, что для всех $j \in M^6$ неравенство $\alpha P_j + \beta R_j \geqslant D_j$ будет выполнено при значениях $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = B$.

Если $M^5 \neq \emptyset$ и $M^7 \neq \emptyset$, то для любых $i \in M^5$ и $j \in M^7$ выполнены неравенства $\alpha_0 P_i + \beta_0 R_i - D_i \geqslant 0$ и $\alpha_0 P_j + \beta_0 R_j - D_j \geqslant 0$. Пусть $i = \arg\min\limits_{i \in M^5} \frac{D_i - P_i}{R_i}$. Получаем

$$\frac{D_i - \alpha_0 P_i}{R_i} \geqslant \beta_0 \geqslant \frac{D_j - \alpha_0 P_j}{R_j} \Rightarrow (\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j}) - \alpha_0(\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) \geqslant 0.$$

Так как $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$ $\frac{P_i}{R_i} < 0$ и $\frac{P_j}{R_j} > 0$, имеем

$$(\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j}) - (\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) \geqslant (\frac{D_i}{R_i} - \frac{D_j}{R_j}) - \alpha_0(\frac{P_i}{R_i} - \frac{P_j}{R_j}) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$B = \frac{D_i - P_i}{R_i} \geqslant \frac{D_j - P_j}{R_j},$$

$$P_j + BR_j \geqslant D_j.$$

Таким образом, для всех $j \in M^7$ неравенство $\alpha P_j + \beta R_j \geqslant D_j$ будет выполнено при значениях $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = B$.

Из доказанного выше следует, что если $M^5 \neq \emptyset$, то неравенство $\alpha P_i + \beta R_i \geqslant D_i$ будет выполнено для всех $i \in M^2 \cup M^5 \cup M^6 \cup M^7$ при $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = B$. Обратное утверждение очевидно, достаточно взять $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = B$.

Если же $M^5 = \emptyset$, то все приведенные рассуждения будут верны для значения $B' = \max\limits_{i \in M^2 \cup M^6 \cup M^7} \frac{D_i - P_i}{R_i}$. Таким образом, если для некоторых $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$ система неравенств (8) верна, то:

- если $M^4 \neq \emptyset$, то система (8) верна при $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$;
- если $M^4 = \emptyset, M^5 \neq \emptyset$, система (8) верна при $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = B$;
- если $M^4 = \emptyset, M^5 = \emptyset, M \neq M^3$, система (8) верна при $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = B'$;
- если $M = M^3$, то система (8) верна при $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$.

Покажем алгоритм нахождения $\alpha_1 \in \{0, 1\}, \beta_1 \in [0, +\infty)$.

Алгоритм 4

Data: $P_1, \ldots, P_n, R_1, \ldots, R_n, D_1, \ldots, D_n$
Result: α_1, β_1

if $M^4 \neq \emptyset$ **then**
  $\alpha_1 := 0, \beta_1 := 0;$
else
  if $M^5 \neq \emptyset$ **then**
    $\alpha_1 := 1, \beta_1 := \min\limits_{i \in M^5} \frac{D_i - P_i}{R_i};$
  else
    if $M \neq M^3$ **then**
      $\alpha_1 := 1, \beta_1 := \max\limits_{i \in M^2 \cup M^6 \cup M^7} \frac{D_i - P_i}{R_i};$
    else
      $\alpha_1 := 1, \beta_1 := 0;$
    end
  end
end
for *($i = 1, i < n, i++$)* **do**
  if $\alpha_1 P_i + \beta_1 R_i < D_i$ **then**
    return(Не существует $\alpha \in [0, 1]$ и $\beta \in [0, +\infty)$, для которых система (1) верна.);
  end
end
return(α_1, β_1).

Для того чтобы удостовериться, существуют ли $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$ такие, что система (8) выполняется, достаточно проверить на выполнимость все неравенства системы для найденных значений α_1 и β_1. Если хотя бы одно из неравенств неверно, то из доказательства, приведенного выше, следует, что не существует таких $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$, для которых система неравенств (8), а следовательно, и система (1) верны.

Таким образом, система неравенств (1) верна при некоторых $\alpha_0 \in [0, 1]$ и $\beta_0 \in [0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда будет верна система неравенств (8) при α_1, β_1, найденных с использованием алгоритма 4. Что и требовалось доказать.

Лемма 6. Трудоемкость алгоритма 4 не превышает $O(n \log n)$ операций.

Доказательство леммы 6. Алгоритм 4 выполняет одну сортировку, две операции присвоения, $O(n)$ операций по выяснению типа неравенств и проверку выполнимости $O(n)$ неравенств. Наиболее трудоемкой частью является сортировка сложностью $O(n \log n)$ операций.

6. Заключение

Расширена полиномиально разрешимая область классической NP - трудной в сильном смысле задачи $1|r_j|L_{\max}$. Представлен алгоритм построения множества Парето-оптимальных расписаний в соответствии с критериями $L_{\max}$ и $C_{\max}$ трудоемкостью $O(n^3 \log n)$ операций. Представлен алгоритм для определения принадлежности примера к полиномиально разрешимой области и нахождения параметров α и β трудоемкостью $O(n \log n)$ операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Ann. Discret. Math. 1979. V.5. P.287-326.

2. *Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P.* Complexity of machine scheduling problems // Ann. Discret. Math. 1977. V.1. P. 343-362.

3. *Jackson J.R.* Scheduling a production line to minimize maximum tardiness // Los Angeles, CA: University of California, 1955. Manag. Sci. Res. Project. Res. Report № 43.

4. *Simons B.B.* A fast algorithm for single processor scheduling // In 19 Ann. Sympos. Found. Comp. Sci. (Ann Arbor, Mich., 1978) P. 246-252.

5. *Hoogeven J.A.* Minimizing maximum promptness and maximum lateness on a single machine // Math. Oper. Res. 1996. V.21. P. 100-114.

6. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М. Изд-во: МФТИ, 2008, 222 с.

7. *Лазарев А.А., Архипов Д.И., Карпов И.В.* Polynomially Solvable Case of the NP-Hard Problem $1|r_j|L_{\max}$ // Int. Conf. on Project Management Sched. Tours 2010. P. 289-293.

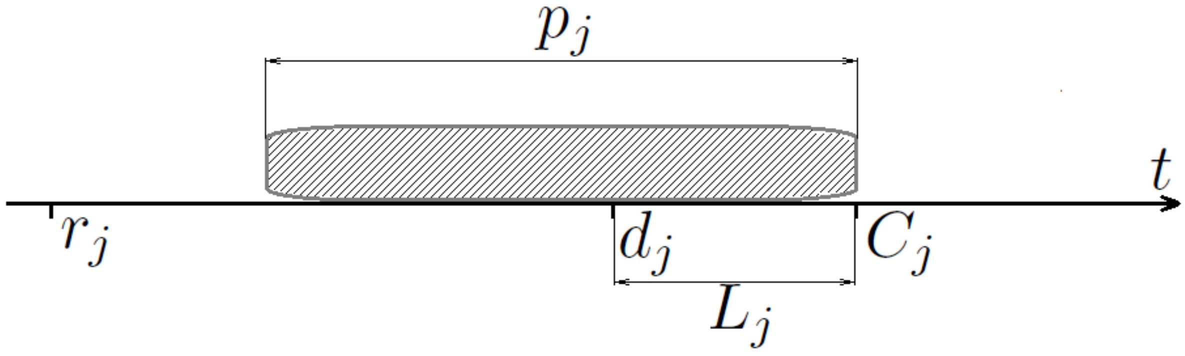

Рис. 1. Параметры требования j.

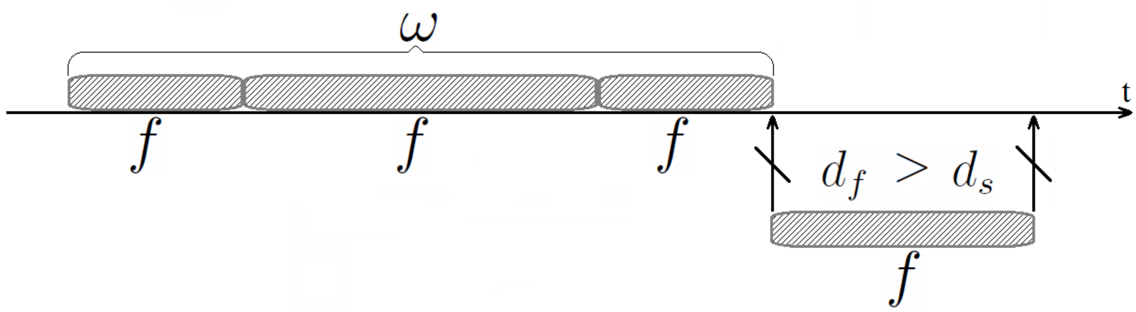

Рис. 2. Построение расписания $\omega(N, t)$.

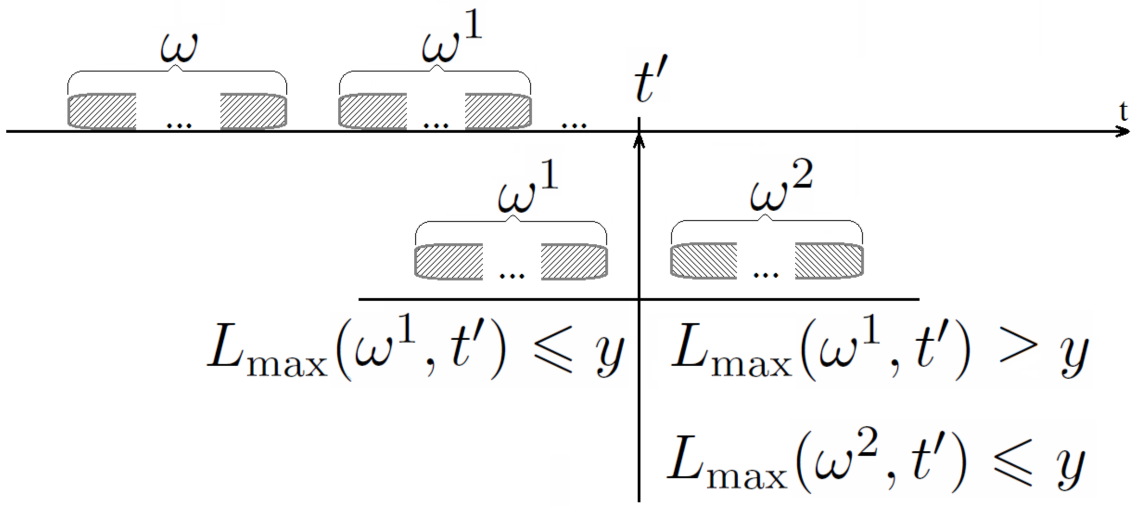

Рис. 3. Построение расписания Θ.

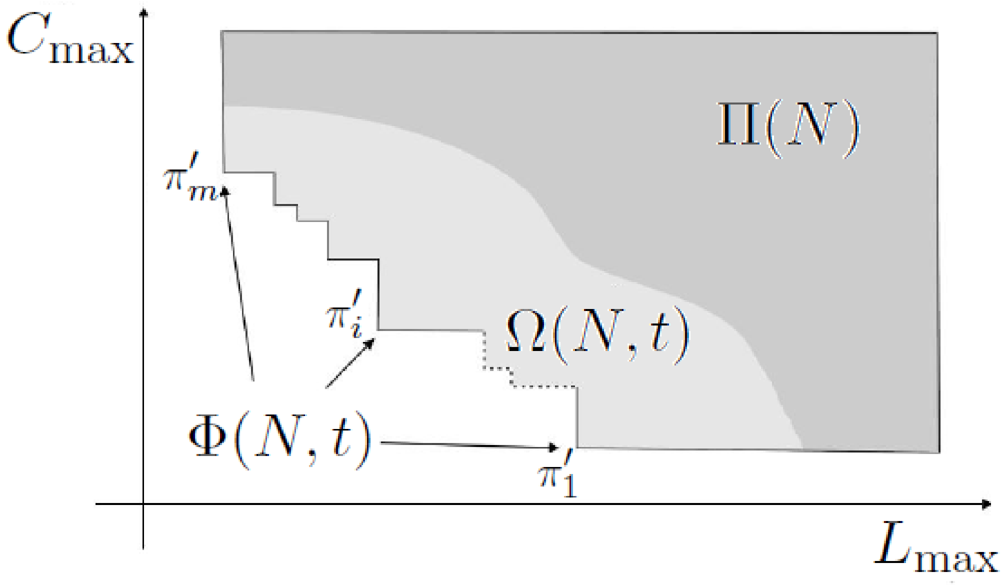

Рис. 4. Множество расписаний, оптимальных по Парето.

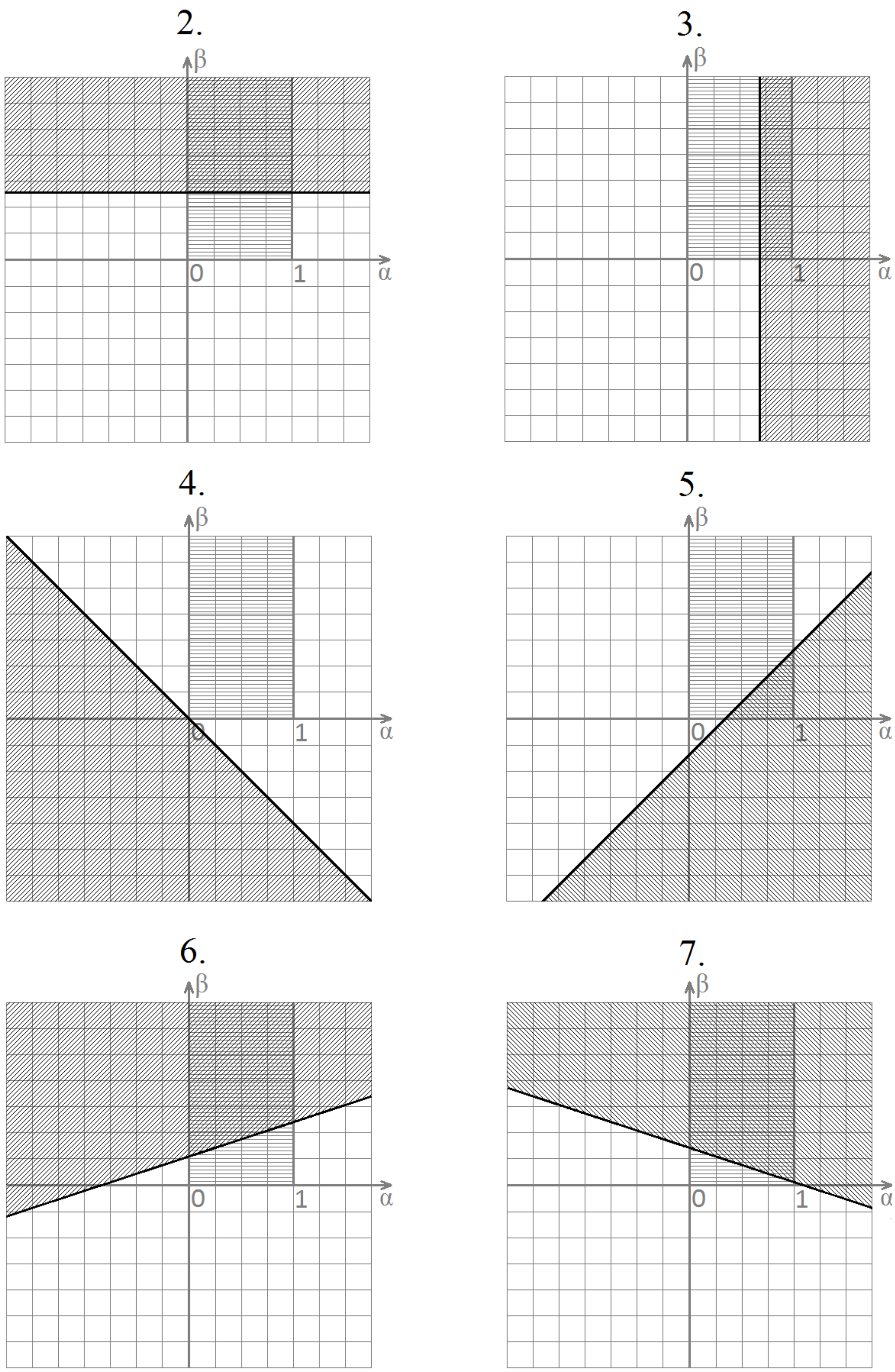

Рис. 5. Типы неравенств системы (8).

Разметка:

рис.1 Параметры требования j.
рис.2 Построение расписания $\omega(N, t)$.
рис.3 Построение расписания Θ.
рис.4 Множество расписаний, оптимальных по Парето.
рис.5 Типы неравенств системы (8).