УДК 510.52

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КЛАССА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ С АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИЕЙ СТЕПЕННОГО ВИДА В ЦЕЛЯХ АНАЛИЗА ТРУДОЁМКОСТИ РЕКУРСИВНЫХ АЛГОРИТМОВ

ANALYTICAL SOLUTION FOR A CLASS OF RECURRENCE RELATIONS WITH POWER-LIKE ADDITIVE FUNCTION WITH A VIEW TO ANALYZE THE RECURSIVE ALGORITHMS COMPLEXITY

Головешкин В.А., д-р. техн. наук, проф.,

Пономарёв А.В., кандидат физ.-мат. наук.

Московский государственный университет приборостроения и информатики

Ульянов М.В., д-р. техн. наук, проф.

Московский государственный университет печати

Аннотация

В статье предложено аналитическое решение специального класса нелинейных рекуррентных соотношений со степенной аддитивной функцией. Исследуемые рекуррентные соотношения характерны для функций трудоемкости рекурсивных алгоритмов, разработанных методом декомпозиции и обладающих степенной трудоемкостью объединения полученных решений. Аналитические решения получены для рекуррентных соотношений с аргументом типа «пол» и «потолок», возникающих при теоретическом рассмотрении исследуемого класса. Результаты позволяют аналитически получить функции трудоемкости рекурсивных алгоритмов, декомпозирующих решаемую задачу со степенной трудоемкостью объединения результатов.

Abstract

The article proposes an analytical solution for a special class of recurrence relations with power-like additive function. Recurrence relations under investigation are specific to complexity functions of recursive algorithms being developed by decomposition method and having power complexity in integrating of obtained solutions. Analytical solutions are obtained for recurrence relations with a «floor and ceiling»-type argument occurring in theoretical consideration of investigated class. The results afford one to obtain analytically the complexity functions for recursive algorithms decomposing the solved problem with power complexity in integrating of results.

1. Введение

При исследовании рекурсивных алгоритмов очевидный интерес представляет задача получения функции трудоемкости алгоритма в явном виде (аналитическое решение) на основе теоретического анализа. Содержательно трудоёмкость понимается как число заданных алгоритмом базовых операций принятой модели вычислений, при этом аргументом функции трудоёмкости является длина входа алгоритма [1]. Практический интерес к этой задаче порождается необходимостью исследования класса рекурсивных алгоритмов, разработанных методом декомпозиции. Цель настоящей статьи — предложить аналитическое решение данной задачи в классе рекурсивных декомпозирующих алгоритмов со степенной аддитивной функцией.

Основная идея метода декомпозиции состоит в сведении исходной задачи к решению ряда более простых задач с понижением их размерности [1, 2], и последующим объединением полученных решений. Такой подход порождает, очевидно, рекурсивную структуру алгоритма и, соответственно, описание функции трудоёмкости в виде рекуррентного соотношения [1]. При этом под размерностью задачи понимается некоторая мера длины входа алгоритма.

Формально: пусть n — размерность решаемой задачи, тогда если в рекурсивном алгоритме, при решении задачи размерности n происходит такое её разделение, которое приводит к необходимости решения C подзадач размерностью n/k, и k является делителем n, т.е. $n \bmod_k = 0$, то функция трудоемкости такого алгоритма $f_A(n)$ имеет вид [1]:

$$f_A(n) = C \cdot f_A(n/k) + d(n) + U(n), \tag{1.1}$$

где: $d(n)$ — трудоемкость фрагмента алгоритма, выполняющего разделение (декомпозицию) задачи на подзадачи, $U(n)$ — трудоемкость фрагмента алгоритма, объединяющего полученные решения C подзадач размерностью n/k в решение задачи размерности n. При этом на шаге останова рекурсии для некоторой малой размерности задачи, т. е. при $0 \le n \le n_0$, возможно ее прямое (не рекурсивное) решение. Обозначив трудоемкость получения этого прямого решения через $N_0(n)$, и вводя обозначение $g(n) = d(n) + U(n)$, с учётом (1.1) получаем вид рекуррентного соотношения для функции трудоемкости алгоритмов, разработанных методом декомпозиции в частном случае, если значение k является делителем числа n [1]:

$$\begin{cases} f_A(n) = N_0(n), \quad 0 \le n \le n_0; \\ f_A(n) = C \cdot f_A(n/k) + g(n),\ n > n_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В общем случае размерность решаемой задачи должна, очевидно, быть целой, следовательно, если $n \bmod k \ne 0$, то вместо значения n/k в качестве аргумента функции должна фигурировать целая часть частного с округлением вниз или вверх, т. е. $\lfloor n/k \rfloor$ или $\lceil n/k \rceil$, что существенно осложняет получение аналитического решения. Таким образом, мы приходим к рекуррентным соотношениям вида

$$\begin{cases} f_A(n) = N_0(n)\ , \quad 0 \le n \le n_0; \\ f_A(n) = C \cdot f_A([n/k]) + g(n),\ n > n_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где через $[\cdot]$ мы обозначаем $\lfloor \cdot \rfloor$ или $\lceil \cdot \rceil$. Функция $g(n)$ в (1.3) называется аддитивной функцией рекуррентного соотношения.

Изучение различных подклассов рекуррентных соотношений вида (1.3) привело к получению целого ряда результатов, — как аналитических решений для некоторых частных случаев, например для $k = 2$ и функции $g(n)$ линейного вида [3], так и асимптотических оценок функции $f_A(n)$ при $n \to \infty$. Основная теорема о рекуррентных соотношениях (J.L. Bentley, D. Haken, J.B. Saxe, 1980 [4]) позволяет получить асимптотическое поведение функции $f_A(n)$ при $n \to \infty$ для достаточно широкого класса функций $g(n)$ при произвольных целых C и k. Очевидно, что для функций $g(n)$ определённого вида могут быть получены не только асимптотические оценки, но и аналитические решения. Авторами данной статьи получены некоторые частные аналитические решения для рассматриваемых рекуррентных соотношений: для аргумента типа $\lfloor n/k \rfloor$ и функций $g(n)$ линейного вида в [5], для аргумента вида $\lceil n/k \rceil$ и линейной функции $g(n)$ — в [6]. Настоящая статья содержит результаты исследований авторов в части более широкого специального класса рекуррентных соотношений (1.3) с аргументами вида $\lfloor n/k \rfloor$ или $\lceil n/k \rceil$, обобщающие ранее полученные результаты на функции $g(n)$ степенного вида.

2. Постановка задачи

Рассмотрим специальный класс рекуррентных соотношений вида (1.3) со степенной функцией $g(n)$, соответствующий функциям трудоёмкости алгоритмов, разработанных методом декомпозиции задачи размерности n на C подзадач размерностью $\lfloor n/k \rfloor$ или $\lceil n/k \rceil$, где C, k — целые положительные числа: $C \ge 2$, $k \ge 2$. В дальнейшем функцию трудоёмкости алгоритма будем обозначать через f. Поскольку множество полиномов замкнуто относительно сложения, то, не теряя общности, мы предполагаем, что функция $g(n)$ имеет степенной вид $g(n) = An^p$. Тогда задача состоит в получении аналитического решения для класса рекуррентных соотношений вида

$$\begin{cases} f(0) = d,\ n = 0; \\ f(n) = C \cdot f([n/k]) + A \cdot n^p,\ n > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $[\cdot]$ понимается как в (1.3), а аргумент функции n содержательно представляет собой длину входа исследуемого алгоритма. Отметим, что соотношения типа (2.1) характерны для функций трудоемкости алгоритмов решения задачи сортировки, поиска выпуклого охватывающего контура, умножения матриц по Штрассену, умножению длинных целых по Карацубе, и ряда других задач [1, 2]. Например, рекуррентное соотношение, описывающее трудоёмкость алгоритма умножения матриц по Штрассену, с точностью до главного порядка аддитивной функции, имеет следующий вид [2]:

$$f(n) = 7 \cdot f([n/2]) + A \cdot n^2.$$

Мы последовательно рассмотрим два подкласса в (2.1) — подкласс I с аргументом вида «пол» — $\lfloor n/k \rfloor$ и подкласс II с аргументом вида «потолок» — $\lceil n/k \rceil$.

3. Аналитическое решение рекуррентных соотношений в подклассе I

Поскольку для этого подкласса в правой части соотношения (2.1) аргументом функции является целая часть с округлением вниз от деления аргумента n на значение k — $\lfloor n/k \rfloor$, введем в рассмотрение специальное представление числа n по степеням k

$$n = b_m k^m + b_{m-1}k^{m-1} + \cdots + b_1 k + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i k^i, \quad m = \lfloor \log_k n \rfloor, m \geq 1, \tag{3.1}$$

где b_m : $0 < b_m < k$, b_i : $0 \leq b_i < k, i = \overline{1, m-1}$ — целые числа (цифры в системе счисления по основанию k). Введём в рассмотрение также числа N_i, определяемые как $N_i = \left\lfloor \frac{n}{k^i} \right\rfloor$. В силу (3.1) и, в соответствии с определением чисел N_i, получаем следующие формулы:

$$N_0 = n = \sum_{i=0}^{m} b_i k^i, \quad N_i = \sum_{j=i}^{m} b_j k^{j-i}, \quad N_m = b_m, \quad N_{m+1} = 0, \tag{3.2}$$

Рассмотрим значения функции $f(\cdot)$ из (2.1) для рассматриваемого подкласса I с аргументом N_i. В силу определения N_i деление на k и взятие целой части приводит к:

$$\begin{aligned}
&f(N_0) = Cf(N_1) + AN_0{}^p, \\
&f(N_1) = Cf(N_2) + AN_1{}^p, \\
&\ldots \\
&f(N_i) = Cf(N_{i+1}) + AN_i{}^p, \\
&\ldots \\
&f(N_m) = Cf(N_{m+1}) + AN_m{}^p.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку число n представляется в виде (3.1), и $f(N_0) = n, f(N_{m+1}) = f(0) = d$, то, последовательно подставляя значения $f(N_i), i = \overline{m+1, 1}$ в $f(N_{i-1})$, тем самым, решая рекуррентное соотношение методом подстановки, получаем аналитическое решение для $f(n)$, а именно:

$$f(n) = C^{m+1} f(0) + A\sum_{i=0}^{m} C^i N_i^p = C^{m+1} d + A\sum_{i=0}^{m} C^i N_i^p . \tag{3.4}$$

Главная асимптотика (3.4) при $n \to \infty$ оценивается соотношением

$$\begin{aligned}
f(n) &\sim C^{m+1} d + A\sum_{i=0}^{m} C^i \frac{n^p}{k^{(ip)}} = C^{m+1} d + An^p \frac{1 - \frac{C^{m+1}}{k^{(m+1)p}}}{1 - \frac{C}{k^p}} = \\
&= C^{m+1} d + A\frac{n^p}{k^{mp}} \frac{k^{(m+1)p} - C^{m+1}}{k^p - C}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Рассмотрим полученную главную асимптотику функции $f(n)$ для разных случаев, порождаемых знаком знаменателя в (3.5):

1. При $C < k^p$ асимптотика функции $f(n)$ имеет вид:

$$f(n) \sim An^p \frac{1}{1 - \frac{C}{k^p}} = An^p \frac{k^p}{k^p - C}.$$

2. При $C = k^p$ асимптотика функции $f(n)$ имеет вид

$$f(n) \sim C^{m+1}d + An^p(m+1),$$

но так как значение $m = \lfloor \log_k n \rfloor$, то

$$f(n) \sim C^{1+\lfloor \log_k n \rfloor}d + An^p(\lfloor \log_k n \rfloor + 1) = k^p dk^{p\lfloor \log_k n \rfloor} + An^p(\lfloor \log_k n \rfloor + 1).$$

3. При $C > k^p$ асимптотика функции $f(n)$ имеет вид

$$f(n) \sim C^{1+\lfloor \log_k n \rfloor}d + An^p\left(\frac{\left(\frac{C}{k^p}\right)^{\lfloor \log_k n \rfloor + 1}}{\frac{C}{k^p} - 1}\right).$$

Заметим, что в частном случае при $p = 2$, в соответствии с (3.4) и (3.2), функция $f(n)$ представляется в виде

$$f(n) = C^{m+1}d + A\sum_{i=0}^{m} C^i \cdot \left(\sum_{j=i}^{m} b_j k^{j-i}\right)^2, \tag{3.6}$$

то есть является квадратичной формой относительно b_j и может быть преобразована следующим образом:

$$f(n) = C^{m+1}d + \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} S_{ij} \cdot b_j\right), \tag{3.7}$$

где S_{ij} — коэффициенты квадратичной формы. Получим эти коэффициенты в явном виде путём дифференцирования (3.6) и (3.7) по аргументу $b_l, l = \overline{0, m}$. Дифференцирование выражения (3.7) позволяет установить связь между коэффициентами квадратичной формы и производными функции $f = f(n)$, а именно

$$\frac{\partial f}{\partial b_l} = \sum_{j=0}^{l} S_{lj}b_j + \sum_{i=l}^{m} S_{il}b_i, \quad b_l = \overline{0, m},$$

что позволяет выразить коэффициенты S_{ij} через вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b_l \partial b_r} = S_{lr},\ r < l; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b_l^{\ 2}} = 2S_{ll}. \tag{3.8}$$

Дифференцирование (3.6) позволяет получить явные выражения для первых производных:

$$\frac{\partial f}{\partial b_l} = A\sum_{i=0}^{l} C^i \cdot \left(\sum_{j=i}^{m} b_j k^{j-i}\right) \cdot \left(2 \cdot k^{l-i}\right), \tag{3.9}$$

откуда, в соответствии с (3.8), вторые частные производные (3.9) позволяют определить явные выражения для коэффициентов квадратичной формы, а именно:

а) при $r < l$ коэффициенты S_{lr}:

$$S_{lr} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_l \partial b_r} = A\sum_{i=0}^{r} 2C^i k^{r-i} \cdot k^{l-i} = 2Ak^{r+l}\sum_{i=0}^{r} \frac{C^i}{k^{2i}} = 2Ak^{l-r}\,\frac{k^{2(r+1)} - C^{r+1}}{k^2 - C}, \qquad (3.10)$$

б) при $r = l$ — коэффициенты S_{ll}:

$$S_{ll} = \frac{\partial^2 f}{\partial {b_l}^2} = 2A\frac{k^{2(l+1)} - C^{l+1}}{k^2 - C}. \qquad (3.11)$$

4. Аналитическое решение рекуррентных соотношений в подклассе II

Для этого подкласса в правой части соотношения (2.1) аргументом функции является «потолок» — $\lceil n/k \rceil$. В целях получения аналитического решения представим число n в следующем виде

$$n = b_m k^m - b_{m-1}k^{m-1} - \cdots - b_1 k - b_0, \quad m = \lceil \log_k n \rceil, m \ge 1, \qquad (4.1)$$

где b_m: $0 < b_m < k$, b_i: $0 \le b_i < k, i = \overline{1, m-1}$ — целые числа. Поступая аналогично рассмотрению подкласса I, введём в рассмотрение числа M_i, определяемые как $M_i = \left\lceil \frac{n}{k^i} \right\rceil$. В силу представления (4.1) и определения чисел M_i, получаем для них следующие формулы:

$$M_0 = n, \quad M_i = b^m k^{m-i} - \sum_{j=i}^{m-1} b_j k^{j-i}, \quad M_m = b_m, \quad M_{m+1} = 0. \qquad (4.2)$$

Представление (4.2) позволяет получить соотношения, аналогичные (3.3), а именно значения функции $f(\cdot)$ с аргументом типа «потолок» из (2.1), в случае, если её аргументами являются числа M_i, задаются формулами:

$$\begin{aligned}
&f(M_0) = Cf(M_1) + A{M_0}^p,\\
&f(M_1) = Cf(M_2) + A{M_1}^p,\\
&\ldots\\
&f(M_i) = Cf(M_{i+1}) + A{M_i}^p,\\
&\ldots\\
&f(M_m) = Cf(M_{m+1}) + A{M_m}^p.
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Поскольку число n представляется в виде (4.1), и $f(M_0) = n, f(M_{m+1}) = f(0) = d$, то, последовательно подставляя значения $f(M_i), i = \overline{m+1, 1}$ в $f(M_{i-1})$, тем самым, решая рекуррентное соотношение (2.1) методом подстановки, получаем аналитическое решение для $f(n)$, а именно:

$$f(n) = C^{m+1} f(0) + A\sum_{i=0}^{m} C^i {M_i}^p = C^{m+1}d + A\sum_{i=0}^{m} C^i {M_i}^p. \qquad (4.4)$$

Главная асимптотика (4.4) при $n \to \infty$ аналогична соотношениям, полученным для подкласса I, однако, основное отличие состоит в том, что для подкласса II значение $m = \lceil \log_k n \rceil$, в то время как значение m для подкласса I имеет вид: $m = \lfloor \log_k n \rfloor$. Таким образом, в случае, если $C = k^p$ имеем

$$f(n) \sim k^p \cdot d \cdot k^{p\lceil \log_k n \rceil} + An^p \left(\lceil \log_k n \rceil + 1 \right).$$

Рассуждая, для частного случая $p = 2$, аналогично ситуации в подклассе I, преобразуем $f(n)$, подставляя в (4.4) формулу (4.2) для чисел M_i:

$$f(n) = C^{m+1} d + A \sum_{i=0}^{m} C^i \left(b^m k^{m-i} - \sum_{j=i}^{m} b_j k^{j-i} \right)^2, \tag{4.5}$$

и аналогично представим $f(n)$ в виде квадратичной формы относительно b_j:

$$f(n) = C^{m+1} d + \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} b_j S_{ij} \right), \tag{4.6}$$

где S_{ij} — коэффициенты квадратичной формы, которые связаны с частными производными функции f известными соотношениями (3.8). Дифференцирование (4.5) позволяет получить явные выражения для частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial b_l} = A \sum_{i=0}^{l} C^i \left(b^m k^{m-i} - \sum_{j=i}^{m-1} b_j k^{j-i} \right) \cdot \left(-2k^{l-i} \right). \tag{4.7}$$

Особенностью формулы (4.7) по сравнению с аналогичным результатом для подкласса I, который задаётся формулой (3.9), является изменение знака у сомножителя k^{l-i}, связанное с видом функции $f(n)$ в силу (4.5). Это приводит к тому, что при $l < m$ и $r < l$ вторые частные производные (4.7) позволяют определить коэффициенты S_{lr}, которые совпадаю с выражениями, полученными для коэффициентов квадратичной формы в подклассе I:

$$S_{lr} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_l \partial b_r} = 2Ak^{l-r} \frac{k^{2(r+1)} - C^{r+1}}{k^2 - C},$$

однако при $l = m$ и $r < m$ — коэффициенты S_{mr} изменяют знак:

$$S_{lr} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_m \partial b_r} = -2Ak^{m-r} \frac{k^{2(r+1)} - C^{r+1}}{k^2 - C},$$

в то время как при $l = r$, в том числе, и при $l = m$ коэффициенты S_{ll} совпадают с формулой (3.11), и задаются выражением:

$$S_{ll} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_l^2} = 2A \frac{k^{2(l+1)} - C^{l+1}}{k^2 - C}.$$

4. Заключение

В статье получены аналитические решения для нелинейных рекуррентных соотношений, с аргументами типа «пол» и «потолок», относящихся к специальному классу с аддитивной функцией степенного вида. Для частного случая квадратичной функции получено представление аналитического решения в виде квадратичной формы и определены её коэффициенты. Рекуррентные соотношения рассмотренного класса возникают при теоретическом анализе трудоемкости рекурсивных алгоритмов, разработанных методом декомпозиции. Полученные результаты могут быть использованы в целях детального теоретического анализа рекурсивных декомпозирующих алгоритмов, имеющих степенную трудоемкость разделения задачи и объединения полученных решений.

Библиографический список

1. Головешкин В. А., Ульянов М.В. Теория рекурсии для программистов. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 296 с.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-ое издание: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1296 с.
3. Грэхем Р. , Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. — М.: Мир. 1998. 703 с.
4. J.L. Bentley, D. Haken, J. Saxe A general method for solving divide-anal-conquer recurrences // SIGACT News, 12(3), pp. 36–44, 1980.
5. Головешкин В.А., Ульянов М.В. Аналитическое решение специального класса рекуррентных соотношений в целях анализа рекурсивных алгоритмов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 3(62). С. 96–107.
6. Головешкин В.А., Михайлов Б.М., Пономарев А.В., Ульянов М.В. Аналитическое решение подкласса рекуррентных соотношений в целях анализа трудоемкости рекурсивных алгоритмов // Вестник МГУПИ. сер. Технические и естественные науки, 2009, № 15, С. 34 – 41.