УДК 519.854.2

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПАРКОМ ГРУЗОВЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ

А.А. Лазарев
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики,
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: lazarev@ipu.ru

Р.Р. Садыков
INRIA Bordeaux Sud-Ouest
200 avenue de la Vieille Tour, 33405 Talence, France
E-mail: Ruslan.Sadykov@inria.fr

Ключевые слова: задачи управления, железнодорожные грузовые перевозки, целочисленное программирование, метод генерации колонок

Аннотация: При управлении парком грузовых железнодорожных вагонов необходимо: 1) выбрать подмножество заказов на перевозку грузов между железнодорожными станциями, и 2) обеспечить доставку выбранных грузов путем маршрутизации множества находящихся в управлении грузовых вагонов, так, чтобы прибыль от выполнения заказов была наибольшей. Данная задача может быть сформулирована как задача нахождения многопродуктового потока минимальной стоимости в большом пространственно-временном графе. Нами предложен подход к решению данной задачи, основанный на варианте метода генерации колонок. Примеры задачи большой размерности (до 10 миллионов дуг в графе), возникающие на практике, были решены при помощи данного подхода за несколько минут на компьютере с процессором Intel Xeon X5460 3.16 Ггц.

1. Введение

В российской практике железнодорожных грузовых перевозок, деятельность по формированию грузовых поездов и деятельность по управлению парком грузовых вагонов осуществляются разными компаниями [5,6]. Первая относится к ОАО «РЖД», а вторая к компаниям-операторам грузовых перевозок. Поэтому общая задача оптимизации грузовых перевозок разбивается на две подзадачи. Операторы принимают заказы на перевозку грузов и назначают на их исполнение имеющиеся в их распоряжении вагоны. Каждый вагон получает маршрут, состоящий из цепочки перегонов между станциями. Получив сводную информацию о движении грузовых вагонов, ОАО «РЖД» формирует грузовые составы, определяет маршруты и расписание их движения.

В данной статье рассматривается оптимизационная задача оператора грузовых перевозок. Задача включает в себя подачу по расписанию вагонов под заявку и их перевозку между станциями. В заявке указывается какой груз куда необходимо перевезти до какого срока. Заявку можно принять либо отклонить (кроме небольшого числа «обязательных»). Принятые заявки можно выполнить полностью либо частично (заплатив при этом штраф). Для перевозки некоторых видов грузов подходят только определенные типы вагонов. В начальный момент времени известно, сколько пустых вагонов какого типа находится на каждой станции. Кроме того, известны времена поступления заявок, их сроки и время, необходимое на перевозку вагонов. Главной целью является максимизировать прибыль от выполнения заявок. На величину прибыли влияют расходы от перевозки вагонов между станциями (как с грузом, так и порожних), стоянки вагонов и штрафы за невыполнение принятых заявок. Кроме того, стоит отметить, что дешевле перевозить сразу большее число вагонов. Также существуют специальные станции «отстоя», на которых стоянка вагонов обходится дешевле. Необходимо решить, какие заявки принимать к исполнению, а от каких стоит отказаться.

2. Постановка задачи

В данном варианте задачи мы не берем в расчет групповые перевозки вагонов, т.е. мы предполагаем, что время и стоимость перегона одного вагона (с грузом или без) не зависит от количества вагонов в группе, в составе которой данный вагон перевозится. Вариант задачи с учетом грузовых перевозок будет нами рассмотрен позднее.

Также в данном варианте задачи мы предполагаем, что все заказы являются простыми: в каждом заказе запрашивается перевозка определенного количества груза одного типа из одной станции в другую. Доход, полученный за выполнение одного заказа, не зависит от выполнения других заказов.

Также предполагается, что вместимость вагонов одинакова: в случае возможности перевозки груза вагонами разных типов, количество требуемых вагонов одинаково для каждого такого типа.

2.1. Исходные данные

Имеются:

- I — множество станций;
- W — множество моделей вагонов;
- K — множество типов грузов;
- Q — множество заявок (заказов) на перевозку грузов;
- S — множество «источников» вагонов, задающих начальное расположение вагонов;
- M — функция, задающая цену перегона порожних вагонов;

- D — функция, задающая длительность перегона порожних вагонов;
- $[t_{beg}, t_{end}]$ — горизонт планирования.

Для каждой станции $i \in I$ известен тариф простоя, т.е. ежедневная плата, которая взымается при нахождении вагона на станции. При этом тариф зависит от заказа, погрузку которого вагон ожидает или разгузка которого была произведена. То есть два вагона могут стоять на одной и той же станции по разному тарифу. Множества тарифов простоя которые взымаются на станции $i \in I$ за подогнанных под погрузку и освободившихся вагонов обозначаются как C_i^1 и C_i^2, соответственно.

Для каждого заказа $q \in Q$ известны:

- $i_q^1 \in I$ — станция отправления;
- $i_q^2 \in I$ — станция назначения;
- $k_q \in K$ — тип груза заказа;
- $W_q \subseteq W$ — множество типов вагонов, которые могут использоваться для выполнения заказа;
- $v_q^{\max}$ — число вагонов, необходимое для перевозки груза заказа;
- $v_q^{\min}$ — минимальное число вагонов, необходимое для частичной перевозки груза заказа;
- $r_q \in [t_{beg}, t_{end}]$ — время поступления заказа, т.е. время, начиная с которого заказ может быть погружен на станции отправления;
- Δ_q — максимальная задержка подачи, т.е. груз заказа должен быть погружен во временном интервале $[r_q, r_q + \Delta_q]$;
- $p_{q\delta}$ — прибыль от доставки одного вагона с грузом, погруженным в момент времени $\bar{t}_q + \delta$, $\delta \in [0, \Delta_q]$;
- $d_q \in \mathbb{Z}_+$ — время перевозки заказа;
- $c_q^1 \in C_{i_q^1}^1$ — тариф простоя перед началом выполнения заявки на станции отправления;
- $c_q^2 \in C_{i_q^2}^2$ — тариф простоя после выполнения заявки на станции назначения;

Для каждой модели вагона $w \in W$ известно множество заказов Q_w из которого вагон данной модели может выполнить заказы.

Для каждого источника $s \in S$ известны:

- $\vec{i}_s \in I$ — станция нахождения вагонов;
- $\vec{w}_s \in W$ — модель вагонов;
- $\vec{r}_s \in [t_{beg}, t_{end}]$ — дата освобождения вагонов;
- $\vec{c}_s \in C_{i_s}^2$ — тариф простоя вагонов;

- $\vec{k}_s \in K$ — тип предыдущего перевезенного груза;
- $\vec{v}_s \in \mathbb{N}$ — количество вагонов в источнике.

Для каждой модели вагона $w \in W$ известно множество источников $S_w = \{s \in S : \vec{w}_s = w\}$.

Функции $M(i,j,k,w)$ и $D(i,j,k,w)$ задают цену и длительность перегона одного порожнего вагона типа $w \in W$ от станции $i \in I$ до станции $j \in I$ при условии, что последний перевезенный данным вагоном груз был типа $k \in K$.

2.2. Формулировка задачи

Мы будем использовать следующие переменные:

- $x_{ijtw}^{c'c''k} \in \mathbb{Z}_+$ — количество порожних вагонов модели $w \in W$, отправляемых после груза типа $k \in K$ в день $t \in [t_{beg}, t_{end}]$ со станции $i \in I$ и тарифа $c' \in C_i^2$ на станцию $j \in I$ и тариф $c'' \in C_j^1$;
- $y_{itw}^{\alpha ck} \in \mathbb{Z}_+$ — количество подогнанных ($\alpha = 1$) и освободившихся ($\alpha = 2$) вагонов модели $w \in W$, стоящих по тарифу $c \in C_i^\alpha$ на станции $i \in I$ в момент времени $t \in [t_{beg}, t_{end}]$ (если $\alpha = 2$, то индекс $k \in K$ определяет тип перевезенного груза);
- $z_{qt}^w \in \mathbb{Z}_+$ — количество вагонов модели $w \in W$, подаваемых под заявку $q \in Q$ в момент времени $t \in [r_q, r_q + \Delta_q]$;
- $u_q \in \{0,1\}$ — выполнена ли заявка (полностью или частично) или нет.

Задача может быть сформулирована как задача нахождения нескольких потоков (каждый из которых соответствует движению вагонов одной модели) максимальной суммарной стоимости в ориентированном графе без циклов с некоторыми дополнительными ограничениями.

Целевой функцией является максимизация прибыли, полученной как разность выручки за выполнения заказов и стоимости простоя и перевозки порожних вагонов:

$$\text{(1)} \quad \max \sum_{q\in Q}\sum_{w\in W_q}\sum_{t=r_q}^{r_q+\Delta_q} p_{q,t-r_q} z_{qt}^w - \sum_{i\in I}\sum_{t=t_{beg}}^{t_{end}}\sum_{w\in W}\sum_{k\in K}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{c\in C_i^\alpha} c\cdot y_{itw}^{\alpha c}$$
$$-\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{t=t_{beg}}^{t_{end}}\sum_{w\in W}\sum_{c'\in C_i^2}\sum_{c''\in C_j^1}\sum_{k\in K} M(i,j,k,w) x_{ijtw}^{c'c''k}.$$

Ограничения на выполнения заказов задают минимальное и максимальное количество вагонов выполняющих каждую заявку $q \in Q$:

$$\text{(2)} \quad \sum_{w\in W_q}\sum_{t=r_q}^{r_q+\Delta_q} z_{qt}^w \leqslant v_q^{\max} u_q$$

$$\text{(3)} \quad \sum_{w\in W_q}\sum_{t=r_q}^{r_q+\Delta_q} z_{qt}^w \geqslant v_q^{\min} u_q$$

Уравнения баланса вагонов задают их передвижения в течение горизонта планирования. Данные уравнения определены для каждого типа вагонов $w \in W$, для каждой станции $i \in I$, для каждого момента времени $t \in [t_{beg}, t_{end}]$, для $\alpha = 1, 2$, для каждого тарифа $c \in C_i^{\alpha}$.

Уравнения баланса для вагонов подогнанных под заявку ($\alpha = 1$):

$$y_{itw}^{1c} = y_{i,t-1,w}^{1c} + \sum_{j \in I} \sum_{\substack{k \in K: \\ t - D(j,i,k,w) \geqslant t_{beg}, \\ M(j,i,k,w) < \infty}} \sum_{c' \in C_j^2} x_{j,i,t-D(j,i,k,w),w}^{c'ck} - \sum_{\substack{q \in Q_w: \\ i_q^1 = i,\, c_q^1 = c}} r_{qtw}, \tag{4}$$

где $y_{i,t_{beg}-1,w}^{1c} = 0$.

Уравнения баланса для вагонов, освободившихся после заявки ($\alpha = 2$) определены для каждого типа груза $k \in K$:

$$y_{itw}^{2ck} = y_{i,t-1,w}^{2ck} - \sum_{\substack{j \in I: \\ M(i,j,k,w) < \infty}} \sum_{c' \in C_j^1} x_{ijtw}^{cc'k} + \sum_{\substack{q \in Q_w: \\ i_q^2 = i,\, c_q^2 = c,\, k_q = k, \\ t - d_q \in [r_q, r_q + \Delta_q]}} r_{q,t-d_q,w} + \sum_{\substack{s \in S_w: \\ \vec{i}_s = i,\, \vec{r}_s = t, \\ \vec{c}_s = c,\, \vec{k}_s = k}} \vec{v}_s, \tag{5}$$

где $y_{i,t_{beg}-1,w}^{2ck} = 0$.

Данная формулировка задачи была предложена Стратонниковым и Ширяевым [7].

3. Подход к решению задачи

3.1. Маршруты вагонов

Через M_w мы будем обозначать множество маршрутов для вагонов модели $w \in W$. Каждый маршрут $m \in M_w$ вагона типа w определяется его источником $s_m \in S_w$, последовательностью перевозок вагоном грузов, его порожними перегонами и простоями, L_m — длина маршрута. Обозначим через

$$(q_{m1}, t_{m1}^1, t_{m1}^2), (q_{m2}, t_{m2}^1, t_{m2}^2), \ldots, (q_{m,L_m}, t_{m,L_m}^1, t_{m,L_m}^2)$$

последовательность перевозок грузов, в которых участвует вагон, движущийся по маршруту m (последовательность может быть пустой, то есть $L_m = 0$). Здесь $q_{ml} \in Q$ — номер заказа, к которому относится перевозимый груз, t_{ml}^1 — момент времени, к которому вагон был подогнан на станцию для выполнения заказа q_{ml}, и t_{ml}^1 — момент начала выполнения заказа q_{ml}. Заметим, что

$$t_{m1}^1 \geqslant \vec{r}_{s_m} + D(\vec{i}_{s_m}, i_{q_{m1}}^1, \vec{k}_{s_m}, w), \quad t_{ml}^2 \geqslant t_{ml}^1,\ 1 \leqslant l \leqslant L_m, \text{ и}$$

$$t_{m,l+1}^1 \geqslant t_{ml}^2 + d_{q_{ml}} + D(i_{q_{ml}}^2, i_{q_{m,l+1}}^1, k_{q_{ml}}, w),\ 1 \leqslant l \leqslant L_m - 1.$$

Прибыль $\ddot{p}_m$, полученная от использования вагона на маршруте $m \in M_w$, $L_m > 0$, может быть вычислена как:

$$\ddot{p}_m = \sum_{l=1}^{L_m} p_{q_{ml}, t^2_{ml} - r_{q_{ml}}} - \vec{c}_{s_m} \cdot (t^1_{m1} - \vec{r}_{s_m}) - \sum_{l=1}^{L_m} c^1_{q_{ml}} \cdot (t^2_{ml} - t^1_{ml})$$
$$- \sum_{l=1}^{L_m - 1} c^2_{q_{ml}} \cdot \left(t^1_{m,l+1} - D(i^2_{q_{ml}}, i^1_{q_{m,l+1}}, k_{q_{ml}}, w) - d_{q_{ml}} - t^2_{ml} \right)$$
$$- c^2_{q_{m,L_m}} \cdot (t_{end} - d_{q_{m,L_m}} - t^2_{m,L_m}) - \sum_{l=1}^{L_m - 1} D(i^2_{q_{ml}}, i^1_{q_{m,l+1}}, k_{q_{ml}}, w).$$

Если $L_m = 0$, то $\ddot{p}_m = \vec{c}_{s_m} \cdot (t_{end} - t_{beg})$.

Обозначим через $\ddot{Q}_m \subseteq Q_w$ множество заказов, в выполнении которых участвует вагон, движущийся по маршруту $m \in M_w$:

$$\ddot{Q}_m = \{q_{m1}, q_{m2}, \ldots, q_{m,L_m}\}$$

Введем обозначение a_{mq}, определяющее участвует ли вагон, движущийся по маршруту $m \in M_w$ в выполнении заказа $q \in Q$:

$$a_{mq} = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in \ddot{Q}_m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $M = \bigcup_{w \in W} M_w$. Обозначим через $\vec{M}_s \subseteq M$ множество маршрутов из источника $s \in S$.

3.2. Переформулировка задачи

Для переформулировки задачи мы будем использовать целочисленные переменные λ_m, которые обозначают количество вагонов, движущихся по маршруту $m \in M$.

Используя переменные λ и u, мы можем сформулировать задачу следующим образом:

$$\max \sum_{w \in W} \sum_{m \in M_w} \ddot{p}_m \lambda_m \tag{6}$$

$$\sum_{w \in W_q} \sum_{m \in M_w} a_{mq} \lambda_m \leqslant v^i_{\max} u_q \quad \forall q \in Q, \tag{7}$$

$$\sum_{w \in W_q} \sum_{m \in M_w} a_{mq} \lambda_m \geqslant v^q_{\min} u_q \quad \forall q \in Q, \tag{8}$$

$$\sum_{m \in \vec{M}_s} \lambda_m = \vec{v}_s \quad \forall s \in S, \tag{9}$$

$$u_q \in \{0, 1\} \quad \forall q \in Q, \tag{10}$$

$$\lambda_m \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall w \in W, m \in M_w. \tag{11}$$

Целевой функцией (6) является максимизация полученной прибыли. Ограничения (7) и (8) гарантируют, что если заказ $q \in Q$ выполнен, то число доставленных вагонов с грузом данного заказа находится между $v_q^{\min}$ и $v_q^{\max}$. Ограничения (9) назначают маршрут на каждый вагон из каждого источника.

3.3. Метод решения

В связи с большой размерностью задачи на первом этапе мы будем решать линейную релаксацию формулировки задачи (6)–(11). В дальнейшем целочисленное решение может быть получено из дробного решения, например, методом последовательного округления.

Линейная релаксация формулировки получается заменой ограничений (10) и (11) наЖ

$$0 \leqslant u_q \leqslant 1 \quad \forall q \in Q, \tag{12}$$
$$\lambda_m \geqslant 0 \quad \forall w \in W, m \in M_w. \tag{13}$$

Мы будем называть линейную релаксацию (6)–(9), (12), (13) *мастер-задачей.*

Заметим, что число всевозможных маршрутов вагонов, которое определяет число переменных λ, очень велико, поэтому мастер-задачу невозможно на практике решать одним из стандартным алгоритмов.

Таким образом, мы применим здесь так называемый метод «генерации колонок», который является адаптацией симплекс-метода для случаев с экспоненциальным (или просто большим) числом переменных.

Метод генерации колонок является итеративным. На каждой итерации мастер-задача с ограниченным числом переменных λ решается симплекс-методом. Затем решается подзадача, которая определяет, существует ли переменная λ, отсутствующая в текущей мастер-задаче, которая может быть введена в базис данной задачи. Определим *приведенную стоимость* переменной при текущем решении как разницу между ее коэффициентом в целевой функции и скалярным умножением вектора ее коэффициентов в ограничениях и вектора текущего двойственного решения. Из теории симплекс-метода известно, что (при максимизации целевой функции) переменная может быть введена в текущий базис, если ее приведенная стоимость положительна.

Таким образом, подзадача заключается в нахождении переменной λ (маршрута следования вагона) с максимальной приведенной стоимостью. Если максимальная приведенная стоимость положительна, то соответствующая переменная добавляется в мастер-задачу и производится переход на следующую итерацию алгоритма генерации колонок. В противном случае, текущее решение мастер-задачи является оптимальным, и алгоритм заканчивает свою работу.

Заметим, что на практике размер мастер-задачи на последней итерации (общее число добавленных туда переменных λ) обычно является приемлемым.

3.4. Алгоритм решения подзадачи

Обозначим через (π', π'', μ) текущее двойственное решение мастер-задачи на некоторой итерации метода генерации колонок. Здесь вектор π' соответствует ограничениям (7), π'' — ограничениям (8), а μ — ограничениям (9).

Подзадача нахождения маршрута следования вагона с максимальной приведенной стоимостью состоит из:

- ограничений (4)–(5), где константы $\vec{v}_s$, $s \in S$, заменены на переменные ν_s, $s \in S$,

- дополнительного ограничения

$$\sum_{s\in S} \nu_s = 1, \tag{14}$$

- и целевой функции

$$\max \sum_{q\in Q_w} \sum_{t=r_q}^{r_q+\Delta_q} (p_{q,t-r_q} - \pi'_q + \pi''_q) \cdot z^w_{qt} - \sum_{i\in I} \sum_{t=t_{beg}}^{t_{end}} \sum_{k\in K} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{c\in C^\alpha_i} c \cdot y^{\alpha c}_{itw}$$
$$- \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \sum_{t=t_{beg}}^{t_{end}} \sum_{c'\in C^2_i} \sum_{c''\in C^1_j} \sum_{k\in K} M(i,j,k,w) x^{c'c''k}_{ijtw} - \sum_{\substack{s\in S:\\ \vec{w}_s=w}} \mu_s \nu_s. \tag{15}$$

Данная подзадача может быть разбита на подзадачи для каждой модели вагонов $w \in W$.

Подзадача для модели вагонов $w \in W$ является задачей нахождения наиболее длинного пути в ориентированном графе без циклов. Данная задача может быть решена методом динамического программирования. Каждая вершина графа соответствует некоторому положению вагона или вагонов в пространстве и во времени. В то же время, вершины графа соответствуют уравнениям баланса двух типов:

- нахождение вагона ожидающего погрузку на станции $i \in I$ в момент времени $t \in [t_{beg}, t_{end}]$ по тарифу $c \in C^1_i$;
- нахождение освободившегося вагона на станции $i \in I$ в момент времени $t \in [t_{beg}, t_{end}]$ по тарифу $c \in C^2_i$ после перевозки груза $k \in K$.

Имеется также дополнительная вершина-источник, от которой исходят дуги к некоторым вершинам второго типа. Каждая такая дуга соответствует переменной ν_s, $s \in S_w$. Также имеются дуги, соответствующие переменным x, y и z для модели вагонов w. Длина дуг определяется коэффициентом соответствующей переменной целевой функции (15).

3.5. Альтернативный метод решения

Существенным недостатком предложенного метода «генерации колонок» является его медленная сходимость: при решении задач большой размерности, т.к. количество требуемых итераций может быть очень большим. Для ускорения сходимости метода предлагается следующая его модификация. После нахождения наиболее длинного пути в подзадаче, в мастер-задачу добавляется не соответствующая ему переменная λ, а переменные x, y, z, соответствующие дугам из которых состоит данный путь. Более того, подзадача может быть сформулированна как задача нахождения потока минимальной стоимости, где поток соответствует множеству маршрутов вагонов одной модели. То есть, решением подзадачи предлагается не один маршрут для одного из вагонов заданной модели, а один маршрут для каждого из вагонов заданной модели. Корректность данной модификации алгоритма следует из работы [3].

Другими словами, альтернативный метод решения состоит в решении оригинальной формулировки задачи (1)–(5) не напрямую, а путем динамической генерации переменных.

4. Результаты

Тестовые примеры были предоставлены отделом математического моделирования компании *Первая Грузовая Компания (ПГК)*, которая является одним из крупнейший операторов железнодорожных грузовых перевозок в России.

Мы протестировали следующие три алгоритма для решения линейной релаксации формулировки задачи (1)–(5).

1. Применение решателя *Clp* [?]. Перед применением, формулировка «предобрабатывается» с помощью специальной процедуры для ее упрощения. Данная процедура является секретом компании и недоступна для нас. Более, того решатель *Clp*, исходный код которого доступен, был модифицирован в компании для более эффективного решения тестовых примеров. Поэтому, данный подход был применен непосредственно в компании, которая сообщила нам результаты. Обозначим данный подход как Direct.

2. Решения линейной релаксации эквивалентной формулировки (6)–(11) методом «генерации колонок», описанном в подразделах 3.3. и 3.4.. Данный подход был реализован с помощью языка программирования C++, используя библиотеку *BaPCod* [4] и решатель задач линейного программирования *Cplex*. Обозначим данный подход как ColGen.

3. Применение альтернативного подхода, описанного в подразделе 3.5.. Для решения подзадачи нахождения потока минимальной стоимости в графе здесь используется библиотека *Lemon* [2]. Заметим, что в отличие от подхода Direct, здесь формулировка «предобрабатывается» только тривиальным образом. Реализация данного подхода была выполнена схожим образом, как и ColGen. Обозначим данный подход как ColGenEF.

Алгоритм Direct был протестирован на компьютере с процессором Intel Xeon X5677 3.47 GHz, алгоритмы ColGen и ColGenEF были протестированны на компьютере с процессором Intel Xeon X5460 3.16 GHz использую только последовательное вычисление (без распараллеливания).

Первый набор состоит из трех тестовых примеров. Характеристики тестовых примеров и полученные на них результаты представлены в таблице 1.

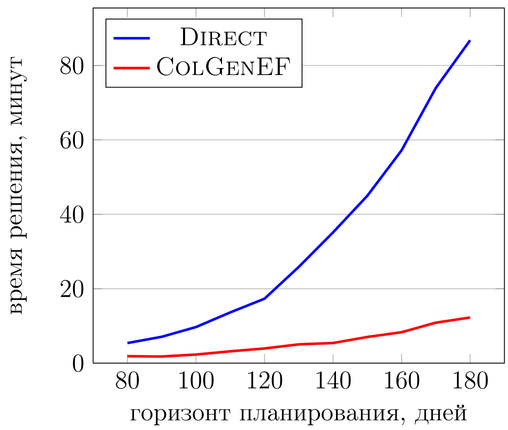
Различие в эффективности подходов Direct и ColGenEF на примерах `x3` и `x3double` обусловлено специальной процедурой их «предобработки», использующейся в первом подходе. Хотя мы не знаем ее подробностей, нам известно, что она основана на сходствах между разными моделями вагонов. Для примера `5k0711q`, в котором только одна модель вагонов, разница в результатах намного меньше. Заметим, что данный пример был искусственно создан из реального путем слияния всех моделей вагонов в одну

Во втором наборе примеров используется более длительный горизонт планирования. Эти примеры имеют следующие характеристики: 1'025 станции, до 6'800 заказов, 11 моделей вагонов, 12'651 вагонов, и 8'232 источников. Горизонт планирования варьируется от 80 до 180 дней. Размер формулировки задачи (1)–(5), который зависит от размера графа $\cup_{c\in C} G_c$, для самого большого примера составляет около 300 тысяч ограничений и 10 миллионов переменных. Для данных примеров двумя наиболее эффективными подходами являются Direct и ColGenEF. Сравнение их

Название примера	x3	x3double	5k0711q
Число станций	371	371	1’900
Число заказов	1’684	3’368	7’424
Число моделей вагонов	17	17	1
Число вагонов	1’013	1’013	15’008
Число источников	791	791	11’215
Горизонт планирования, дней	37	74	35
Число ограничений формулировки, тысяч	62	152	22
Число переменных формулировки, тысяч	794	2’846	1’843
Время решения для Direct	20s	1h34m	55s
Время решения для ColGen	22s	7m53s	8m59s
Время решения для ColGenEF	3m55s	>2h	43s

Таблица 1. Первый набор примеров: характеристики и полученные результаты

времени решения представлено на рисунке 1. Подход ColGen был в два-три раза более медленным, чем Direct.



Горизонт	Direct	ColGenEF
80	5m24s	1m52s
90	7m05s	1m47s
100	9m42s	2m19s
110	13m38s	3m11s
120	17m19s	3m57s
130	25m52s	5m03s
140	35m08s	5m25s
150	44m58s	7m02s
160	57m11s	8m19s
170	1h13m58s	10m53s
180	1h26m46s	12m16s

Рис. 1. Время решения тестовых примером с большим горизонтом планирования

Важным обстоятельством является тот факт, что алгоритм ColGenEF обычно сходится менее, чем за 10 итераций (и всегда менее, чем за 15). Формулировка (1)–(5) содержит на последней итерации только 3% от общего числа переменных, что и обуславливает высокую эффективность алгоритма ColGenEF.

Список литературы

1. Clp - COIN-OR Linear Programming Solver, https://projects.coin-or.org/Clp
2. LEMON Graph Library, https://lemon.cs.elte.hu/trac/lemon
3. Sadykov R., Vanderbeck F. Column generation for extended formulations // EURO Journal on Computational Optimization. 2013. Vol. 1, No. 1-2. P. 81-115.
4. Vanderbeck F. BaPCod – a generic Branch-And-Price Code. https://realopt.bordeaux.inria.fr/?page_id=2
5. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Кварацхелия А.Г., Гафаров Е.Р., Теория расписаний. Задачи управления транспортными системами М: МГУ, 2012. 159 с.
6. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р., Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М: МГУ, 2011. 223 с.

7. Стратонников А.А., Ширяев В.В., Крупномасштабные задачи линейного программирования управления грузовыми вагонопотоками // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Июль, Омск, 2012.