

Оптимизация движения поездов в “узких местах” железнодорожной сети¹

Лазарев А.А.^{2,3,4}, Мусатова Е.Г.², Ласкова М.В.^{2,3}

²Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

³Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

⁴Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва

Ключевые слова: теория расписаний, эвристический алгоритм, узкие места в железнодорожной сети.

Введение

Задачи планирования железнодорожных перевозок представляют собой особый интерес для теории расписаний, так как, с одной стороны, имеют нетривиальные постановки, с другой стороны, - практическую ценность. Не трудно изучить систему грузовых перевозок в России и понять, что, в основном грузопоток производится именно железнодорожным маршрутом. В связи с этим в железнодорожной сети возникает масса задач, оптимальные решения которых позволяют не только избежать дополнительных затрат, но и достичь максимальной прибыльности при принятии тех или иных решений.

Железнодорожная сеть представляет собой сложный граф неоднородной структуры. При подробном рассмотрении структуры всей железнодорожной сети, возникает множество участков сети, отличающихся друг от друга количеством путей, структурой соединения с сортировочными станциями и т.д. Такие области требуют индивидуального подхода. Поэтому рациональнее всего подойти к данной проблеме следующим образом:

- 1) изучить все особенности и характерные черты сети на каждом ее участке;
- 2) выявить те участки сети, которые имеют схожую структуру;
- 3) разбить все участки на определенные группы;
- 4) дать четкое описание и математическую постановку каждой найденной группе;
- 5) предложить алгоритмы решения поставленных задач.

При вышеуказанной классификации железнодорожной сети имеется некоторое количество задач, которые являются “простыми” в том смысле, что для них будет существовать конкретная математическая постановка (а в некоторых случаях постановка будет приближенной). На первый взгляд кажется, что каждая такая задача является легко решаемой, но на самом деле при рассмотрении самой простой задачи, такой как, например, задача

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 11-08-13121-офи-м-2011-РЖД.

составления расписания между двумя станциями, соединенными однокорейной железной дорогой, возникают проблемы.

В большинстве полученных задач возникают следующие целевые функции: увеличение пропускной способности участка железной дороги, получение максимальной прибыли при перевозе тех или иных грузов, минимизации штрафов, минимизация задержки поезда в пути и т.д.

Для того чтобы достичь поставленных целей, необходимо внедрять новые алгоритмы, которые позволяют найти оптимальные решения. Участки с ограниченным числом железнодорожных путей уменьшают пропускную способность сети, особенно в том случае, если имеется всего один железнодорожный путь. В работе предлагается алгоритм по оптимизации движения поездов на однокорейном участке железнодорожной сети. Такой участок железнодорожной сети чаще всего снижает пропускную способность, поэтому носит название “узкое” место. Именно для подобного участка приведен алгоритм оптимизации.

Математическая постановка проблемы “узкого” места в железнодорожной сети

Рассматривается задача формирования расписания движения железнодорожных составов между двумя станциями при условии, что станции соединены однокорейной дорогой.

Пусть известны следующие параметры следования составов:

$N = N_1 \cup N_2$ — множество составов;

$N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество составов, поступивших на первую станцию;

$N_2 = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество составов, поступивших на вторую станцию;

r_i^1 — время поступления i -го, $i \in N_1$, состава на первую станцию для отправки ее на вторую станцию;

r_j^2 — время поступления j -го, $j \in N_2$, состава на вторую станцию для отправки ее на первую станцию;

d_i^1 — директивный срок прибытия i -го состава с первой станции на вторую;

d_j^2 — директивный срок прибытия j -го состава со второй станции на первую;

Будем полагать, что $d_i^s = r_i^s + p$, $s \in \{1, 2\}$, p — продолжительность выполнения перевоза состава с грузом (считаем, что p — постоянная величина, равная отношению расстояния между двумя станциями к средней скорости движения состава). При движении составов в одном направлении между подряд идущими поездами должна соблюдаться дистанция $\delta \geq 0$ единиц времени.

Необходимо составить расписание π движения поездов между двумя станциями, т.е. определить моменты времени S_i^1, S_j^2 отправления i -го состава с первой станции на вторую и j -го состава со второй станции на первую, соответственно.

Обозначим через $C_i^1 = S_i^1 + p$, $C_j^2 = S_j^2 + p$ моменты прибытия составов в пункты назначения.

Необходимо определить моменты отправления поездов со станции 1 на станцию 2 и обратно таким образом, чтобы минимизировать суммарное запаздывание всех поездов [1].

В качестве целевой функции выберем минимизацию суммарного запаздывания всех составов.

Функция минимизации суммарного запаздывания актуальна для железнодорожных компаний, осуществляющих грузовые перевозки, так как в случае невыполнения сроков доставки грузов, компания возмещает штраф, неся убытки.

Алгоритм решения задачи

В качестве начального допустимого расписания выберем следующее. На первом шаге составы, идущие со второй станции, будем отправлять одновременно в момент времени $S_1 = r_m^2$, имея при этом начальное запаздывание всех составов второй станции $F_1^2(S_1)$, где

$$F_1^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m (t - r_j^2).$$

Тогда составы первой станции идут без задержек, если $r_i^1 \leq s_1 - p$ или $r_i^1 \geq S_1 + p$. В противном случае суммарное запаздывание составов первой станции будет равным $F_1^1(S_1)$, где

$$F_1^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I(t)} p - (r_i - t),$$

$$I(t) = \{i: t - p < r_i < t + p\}.$$

Далее рассмотрим моменты времени $t \in T, t \geq S_1$. Выберем S_1^* , при котором достигает минимума целевая функция $F_1(t) = F_1^1(t) + F_1^2(t)$. Пусть π_1 — полученное в этом случае расписание.

На втором шаге фиксируем время отправления m -го состава в положении S_1^* , а для остальных $m - 1$ составов находим момент S_2^* : $r_{m-1}^2 \leq S_2 \leq S_1^*$, при котором достигает минимум целевая функция.

Пусть уже определены моменты $S_k^* \leq S_{k-1}^* \leq \dots \leq S_2^* \leq S_1^*$ отправления составов станции 2 (при этом первые $(m - k + 1)$ составов отправляются в момент времени S_k^*). Пусть $\tau_1^k \leq \tau_2^k \leq \dots \leq \tau_{n-1}^k \leq \tau_n^k$ — моменты отправления составов первой станции, соответствующие расписанию π_k , составленному на k -ом шаге.

На $(k + 1)$ -ом шаге фиксируем моменты отправления $S_k^*, S_{k-1}^*, \dots, S_2^*, S_1^*$ k составов второй станции, а для $m - k$ оставшихся находим время отправления, перебирая возможные моменты $t \in T: r_{m-k}^2 \leq t \leq S_k^*$. Суммарное запаздывание составов второй станции в этом случае вычисляется по формуле

$$F_{k+1}^2(t) = \sum_{j=1}^k (S_j^* - r_{m-j+1}^2) + \sum_{j=1}^{m-k} (t - r_j^2).$$

Покажем, как при этом изменяется расписание движения составов первой станции. Обозначим через $J^{k+1}(t) = \{i: t - p \leq \tau_i^k \leq t + p\}$ множество моментов отправления составов первой станции, которые необходимо изменить в случае, когда составы отправляются со второй станции в момент t . Определим новое расписание составов первой станции следующим образом:

$$\tau_i^{k+1} = \begin{cases} \tau_i^k, & \text{если } i \notin J^k(t); \\ t + p, & \text{если } i \in J^k(t) \text{ и } S_k^* - t \geq 2p; \\ \tau_{q+1}^k, & \text{если } i \in J^k(t) \text{ и } S_k^* - t < 2p, \end{cases}$$

где $q = \max\{i: i \in J^k(t)\}$.

Суммарное запаздывание составов первой станции вычисляется по формуле

$$F_{k+1}^1(t) = \sum_{i=1}^m (\tau_i^{k+1}(t) - r_i^1).$$

Среди моментов времени $t \in T$, $r_{m-k}^2 \leq t \leq S_k^*$ выбираем тот, который доставляет минимум функции запаздывания составов $F_{k+1}(t) = F_{k+1}^1(t) + F_{k+1}^2(t)$.

В результате получаем невозрастающую последовательность значений целевой функции задачи $F_1 \geq F_2 \geq \dots \geq F_{m-1} \geq F_m$, каждое из которых соответствует допустимому расписанию.

Пример работы алгоритма

Рассмотрим пример, иллюстрирующий ход работы алгоритма. Прежде всего введем следующее определение[2]:

Определение

$Batch(k, i)$ – множество, содержащее k составов, отходящих от определенной станции (1 или 2) в один и тот же момент времени S_k^i , где

$$S_k^i = \max\{r_k^2, r_i^1 + p\}.$$

Пусть имеется множество заявок на первой станции $N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ и множество заявок на второй станции $N_2 = \{1, 2, \dots, m\}$. Упорядочим все заявки по возрастанию моментов поступления r , нанесем полное множество заявок на рис.1. Рисунок будет представлять множество одинаковых прямоугольников, так как считается, что время выполнения заявки постоянно. Отличие прямоугольников состоит в принадлежности различным станциям, поэтому их условно можно отличить цветом.

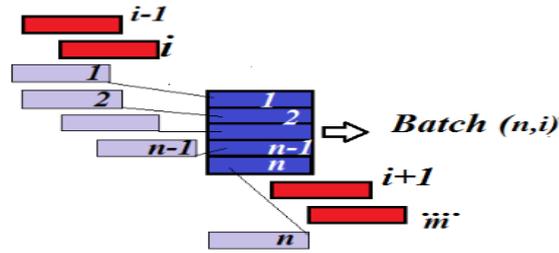


Рис.1

На рис.1 представлено множество заявок $1, 2, \dots, n$, пришедших на станцию 2, и множество заявок $i - 1, i, \dots, m$, пришедших на станцию 1, а также $Batch(n, i)$ – структура, представляющая собой “слоеный” прямоугольник, содержащий n заявок, пришедших на станцию 2. Первый индекс в определении указывает на количество составов в “батче”, второй индекс - на местоположение относительно составов первой станции i .

Пример

Пусть имеются следующие характеристики составов:
 $r_1^1 = 0, r_2^1 = 1, r_3^1 = 3, r_1^2 = 1, r_2^2 = 2, r_3^2 = 4, p = 3$. (см. рис.2)

На рис.2 отмечены моменты поступления составов на станцию. Верхний рисунок описывает составы станции 1. Нижний рисунок - составы станции 2.

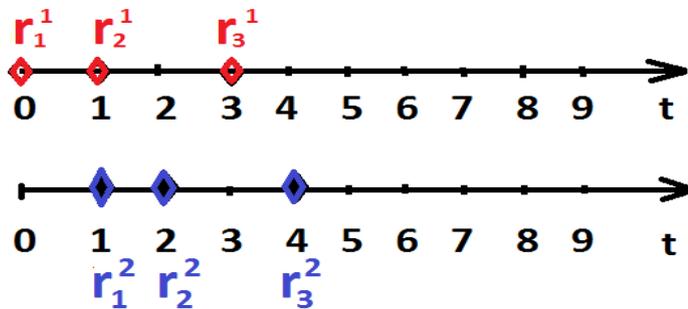


Рис.2

На первом шаге формируем $Batch$, состоящий из всех составов второй станции - $Batch(3, 2)$. Определяем момент его отправления $S = 4$. Данный $Batch$ имеет аргументы 3 и 2, так как состоит из 3 составов и занимает позицию после 2-го состава первой станции (учитывая, что p составляет 3 временных единицы). Целевая функция при этом равна 9.

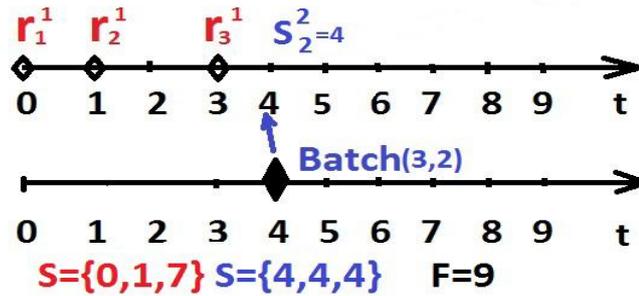


Рис.3

На втором шаге формируем *Batch*, состоящий из всех составов второй станции - *Batch*(3,3). Определяем момент его отправления $S = 6$. Данный *Batch* имеет аргументы 3 и 3, так как состоит из 3 составов и занимает позицию после 3-го состава первой станции (учитывая, что p составляет 3 временных единицы). Целевая функция при этом равна 11.

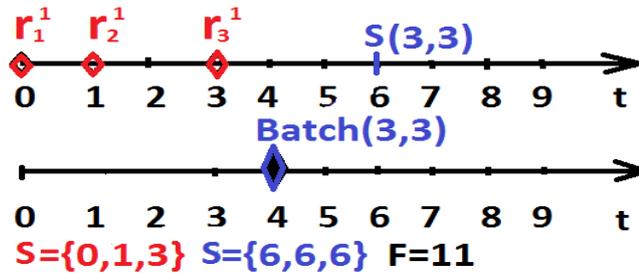


Рис.4

На третьем шаге исходим из полученных результатов, выбирая наименьшее значения целевой функции (значение 9). Фиксируем положение самого позднего состава из множества второй станции в позиции со значением $S = 4$. Далее происходит рассмотрение *Batch*, состоящего из двух составов второй станции. Рассматриваем *Batch*(2,0). Данный *Batch* имеет аргументы 2 и 0, так как состоит из 2 составов и занимает позицию после 0-го состава первой станции (учитывая, что p составляет 3 временных единицы). Целевая функция при этом равна 18.

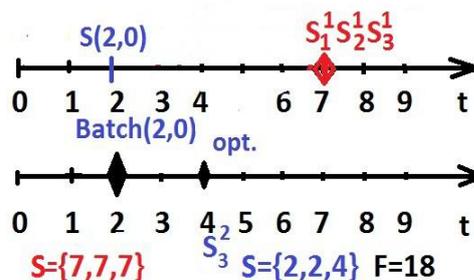


Рис.5

Продельвая такую процедуру до достижения $Batch(1,0)$, находим множество значений целевой функции, соответствующей различным положениям $Batches$ и различным фиксированным составам. Выбором наименьшей из них мы заканчиваем процедуру.

Найденное оптимальное расписание:

$$r_1^1 = 0, r_2^1 = 1, r_3^1 = 7, r_1^2 = 4, r_2^2 = 4, r_3^2 = 4, F = 9.$$

Обратный ход алгоритма

Важно отметить, что описанная процедура оперирует с составами второй станции. Теперь, создавая “батчи”, состоящие из составов первой станции мы будем оперировать с составами первой станции, в некоторых случаях получая меньшее значение целевой функции. Такое необходимое дополнение будем называть обратным ходом алгоритма.

Так в примере 1 на первом шаге будем теперь формировать $Batch$, состоящий из всех составов первой станции - $Batch(3,0)$. Определяем момент его отправления $S = 3$. Данный $Batch$ имеет аргументы 3 и 0, так как состоит из 3 составов и занимает позицию после 0-го состава второй станции (учитывая, что p составляет 3 временных единицы) (см.рис.6).

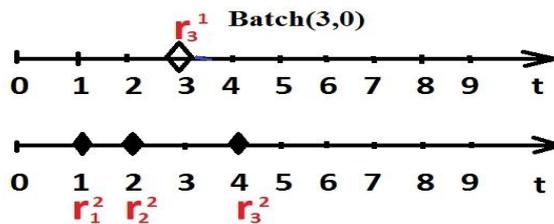


Рис.6

На втором шаге формируем $Batch$, состоящий из всех составов второй станции - $Batch(3,3)$. Определяем момент его отправления $S = 7$. Данный $Batch$ имеет аргументы 3 и 3, так как состоит из 3 составов и занимает позицию после 3-го состава второй станции (учитывая, что p составляет 3 временных единицы).

Общее количество $Batches$ составляет n^2 , поэтому сложность алгоритма $O(n^2)$ операций.

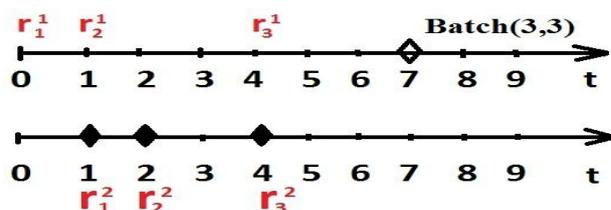


Рис.7

Вычислительный эксперимент

В таблице 1 приведены результаты вычислительного эксперимента по сравнению прямого и обратного хода алгоритма.

Количество составов на первой станции	Количество составов на второй станции	Значения целевой функции при “батчинге” составов второй станции	Значения целевой функции при “батчинге” составов первой станции
5	5	9	11
10	10	44	38
15	15	64	65
20	20	84	88
25	25	110	108
30	30	134	128
50	50	202	218

Табл.1. Сравнение значений целевой функции при прямом и обратном ходе алгоритма.

Нетрудно видеть из таблицы, что минимальные значения целевой функции (выделенные жирным шрифтом числовые значения) достигаются при “батчинге” составов как первой станции, так и второй. Поэтому целесообразным представляется одновременное использование обоих подходов. Отметим, что во всех случаях удалось получить оптимальное решение.

Литература

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г. Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования. – М.: ИПУ РАН, 2012.
2. LazarevA, MusatovaE, LaskovaM. The heuristic approach to movement optimization on single-track part of the railway net.–М.: ВЦРАН, 2012.

Авторы:

1. **Лазарев Александр Алексеевич**,
1958 г.р., зав. лабораторией ИПУ РАН, д.ф.-м.н., профессор,
Телефон: +7 495 334-87-51
e-mail: jobmath@mail.ru
2. **Мусатова Елена Геннадьевна**,
1983 г.р., старший научный сотрудник ИПУ РАН, к.ф.-м.н.,
Телефон: +7 495 334-87-51
e-mail: nekolyar@mail.ru
3. **Ласкова Майя Владимировна**
1991 г.р., техник ИПУ РАН,
Телефон: +7 495 334-87-51
e-mail: laskovayamaya@moscow-index.ru