МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОВЫМИ ПЕРЕВОЗКАМИ[1]

Лазарев А.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва
lazarev@ipu.rssi.ru

Аннотация:
В статье представлены новые модели задач, возникающих в области маршрутизации железнодорожного грузового транспорта, формирования составов и графиков их движения. Предлагаются точные полиномиальные алгоритмы решения частных случаев сформулированных задач.
Ключевые слова: теория расписания, запаздывание, железнодорожный транспорт, задачи маршрутизации.

Введение

В ходе работы над проектом 11-08-13121-офи-м-2011-РЖД на основе анализа особенностей структуры Российской железнодорожной системы (РЖД), были построены модели, возникающие в области маршрутизации транспортных средств и транспортной логистики:

- задача организации доставки грузов по транспортной сети, включающая формирование грузовых составов и разработку графика их движения по сети;
- задача оперативного управления движением составов, включающая локальную диспетчеризацию в отдельно взятых узлах сети (сортировочных станциях) и восстановление графика их движения после сбоев;
- задача формирования грузовых потоков через сортировочные станции.

Данные задачи характеризуются большой размеренностью и трудоемкостью решения. В качестве методов исследований и разработки алгоритмов решения предлагается разбиение на подзадачи и их последовательное решение, а также выделение частных случаев подзадач путем наложения ограничивающих условий на входные данные.
Построены модели формирования составов и графиков движения грузовых поездов через сортировочные станции (с двумя станциями, с цепочкой станций и некоторыми другими структурами расположения станций), для некоторых из которых в ходе работы над проектом разработаны точные полиномиальные алгоритмы решения с целью их последующего применения для решения задач большой размерности.
Статья построена следующим образом. Первые три части содержат модели обозначенных выше практических задач, возникающих при транспортировке грузовых вагонов, а далее представлены варианты задач, для которых разработаны точные полиномиальные алгоритмы.

1. Задача формирования и маршрутизации грузовых составов РЖД

1.1. Общая постановка задачи

Общая проблема заключается в организации оптимальной доставки грузов по Российским железным дорогам. Необходимо сформировать грузовые составы и составить расписание их движения с целью минимизации запаздывания доставки грузов.

[1] *Статья выполнена при финансовой поддержке гранта 11-08-13121-офи-м-2011-РЖД.*

Сеть РЖД включает в себя около 76 сортировочных станций, между которыми осуществляются перевозки грузовых вагонов. Имеется множество заказов на перевозку грузов. В дальнейшем будем предполагать, что множество заказов состоит из одновагонных заказов.

Для перевозки грузов используются грузовые поезда (составы). Под железнодорожным составом будем понимать локомотив, локомотивную бригаду и некоторое множество вагонов. При этом должны удовлетворяться некоторые технические ограничения (максимальный общий вес вагонов, максимальная длина состава, и т.п.). Каждый состав перемещается по определенному маршруту, состоящему из последовательности сортировочных станций. На сортировочных станциях к составу могут быть прицеплены и/или отцеплены вагоны, а также может быть сменен локомотив и локомотивная бригада. Расписание движения каждого состава состоит из последовательности времён прибытия на каждую станцию и времён отбытия со станции на маршруте поезда.

Необходимо составить план формирования грузовых составов и расписание их движения между станциями так, чтобы минимизировать взвешенное суммарное запаздывание всех заказов.

1.2. Задача формирования железнодорожных составов и маршрутов движения при фиксированных расписаниях

Будем считать, что маршруты движения грузовых составов, а также расписание их движения фиксированы. Необходимо назначить вагоны с грузом на поезда, тем самым определив маршрут их движения между сортировочными станциями.

Железнодорожная сеть задана произвольным планарным графом G со множеством вершин N, соответствующим сортировочным станциям, и множеством рёбер E, соответствующим железнодорожным путям.

Рассмотрим случай, когда имеется не более одного заказа на перевозку груза от станции $i \in N$ до станции $j \in N$, и что весь груз доступен для транспортировки в нулевой момент времени. То есть каждый заказ однозначно определяется парой (i, j). Множество заказов будем обозначать как O. Пусть n_{ij} — количество вагонов (заказов), направляемых из i в j, а m_{ij} и l_{ij} — масса и длина каждого вагона используемого для выполнения заказа (i, j). Пусть также w_{ij} — вес (важность) заказа (i, j), и d_{ij} — его директивный срок доставки.

Пусть Q — множество поездов, циркулирующих по сети G. Будем обозначать Q_i^{in} и Q_i^{out} — множество поездов, прибывающих и отбывающих со станции $i \in N$. Множества Q_i^{in} и Q_i^{out} могут быть разными, так как станция i может быть начальной или конечной для некоторых составов. Пусть t_{qi}^{in}, $q \in Q_i^{in}$, и t_{qi}^{out}, $q \in Q_i^{out}$, — время прибытия и отбытия со станции i поезда q. Для простоты предположим, что все поезда принадлежат к одному типу и могут перевозить все вагоны. Обозначим через Δ максимальное время, необходимое, чтобы прицепить или отцепить вагоны от поезда. M и L задают, соответственно, максимальный вес (массу) и длину одного состава.

Для постановки задачи мы будем использовать так называемый пространственно-временной направленный граф (space-time network, [1]) $G' = (V', A')$. Вершины данного графа делятся на три типа:

- **вершины отбытия:** каждая вершина v_{it}^{out} соответствует отбытию со станции $i \in N$ некоторого поезда $q \in Q$ в момент $t = t_{qi}^{out}$;
- **вершины прибытия:** каждая вершина v_{it}^{in} соответствует прибытию на станцию $i \in N$ некоторого поезда $q \in Q$ в момент $t = t_{qi}^{in}$;
- **вершины сортировки:** каждая вершина v_{it}^{srt} соответствует окончанию отцепки вагонов от пришедшего поезда ($t = t_{qi}^{in} + \Delta$, $q \in Q$) или началу прицепки вагонов к отходящему поезду ($t = t_{qi}^{out} - \Delta$, $q \in Q$) на станции $i \in N$.

Рёбра графа G' делятся на пять типов:

- **рёбра движения поезда** (A^{mov}): каждое ребро $a^{mov}_{qij} = (v^{out}_{it'}, v^{in}_{jt''})$ соответствует движению поезда $q \in Q$ со станции i на следующую на его маршруте станцию j, здесь $t' = t^{out}_{qi}$ и $t'' = t^{in}_{qj}$;
- **рёбра стоянки поезда** (A^{tr}): каждое ребро $a^{tr}_{qi} = (v^{in}_{it'}, v^{out}_{it''})$ соответствует стоянке поезда $q \in Q$ на промежуточной на его маршруте станции i, здесь $t' = t^{in}_{qi}$ и $t'' = t^{out}_{qi}$;
- **рёбра отцепки вагонов** (A^{dwn}): каждое ребро $a^{dwn}_{qi} = (v^{in}_{it}, v^{srt}_{i,t+\Delta})$ соответствует отцепке вагонов от поезда $q \in Q$ на находящейся на его маршруте станции i, здесь $t = t^{in}_{qi}$;
- **рёбра прицепки вагонов** (A^{up}): каждое ребро $a^{up}_{qi} = (v^{srt}_{i,t-\Delta}, v^{out}_{it})$ соответствует прицепке вагонов к поезду $q \in Q$ на находящейся на его маршруте станции i, здесь $t = t^{out}_{qi}$;
- **рёбра сортировки** (A^{srt}): каждое ребро $a^{srt}_{it't''} = (v^{srt}_{it'}, v^{srt}_{it''})$ между соседними вершинами сортировки станции i (вершины сортировки v^{srt}_{it} упорядочены по возрастанию моментов времени t).

На рис. 1 показана часть пространственно-временного графа G', соответствующая станции i графа G.

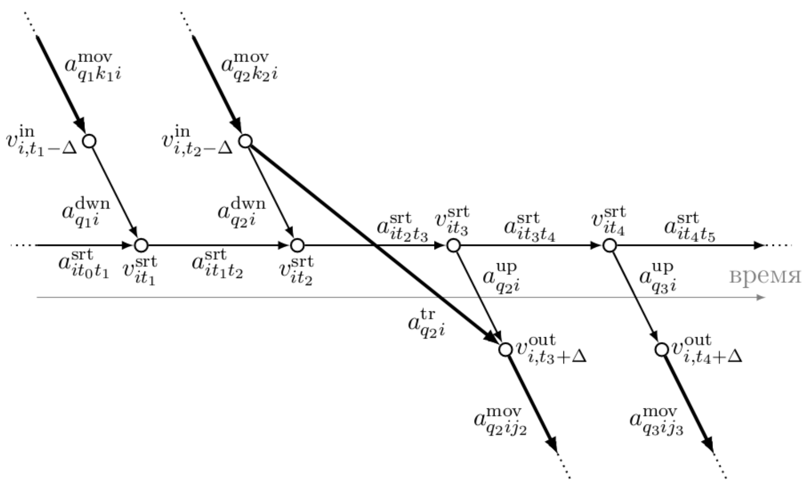

Рис. 1. Пример части пространственно-временного графа (станция i).

Маршрут движения каждого вагона из заказа однозначно определяется соответствующим путем в пространственно-временном графе. Например, частичный путь

$$(v^{in}_{i,t_1-\Delta}, v^{srt}_{it_1}, v^{srt}_{it_2}, v^{srt}_{it_3}, v^{out}_{i,t_3+\Delta})$$

на рис. 1 соответствует маршруту, по которому вагон прибывает на станцию i в составе поезда q_1, перецепляется и отбывает со станции в составе поезда q_2. Путь вагона из заказа $(i,j) \in O$ начинается в вершине v^{srt}_{i0} и заканчивается в вершине v^{srt}_{jH}, где H — длина горизонта планирования (максимальное время прибытия поезда на его конечную станцию). Движение всех вагонов заказа $(i,j) \in O$ соответствует потоку величины n_{ij} от источника v^{srt}_{i0} до стока v^{srt}_{jH} в пространственно-временном графе G'. Очевидно, что поток должен быть целочисленным, т.е. величина потока на каждом ребре должна быть некоторым положительным целым числом.

Пусть целочисленная переменная f^a_{ij} определяет величину потока $(i,j) \in O$ по ребру $a \in A'$, т.е. количество вагонов "перемещенных" по ребру a. Тип перемещения (движение, стоянка, сцепка, отцепка) зависит от типа ребра. Пусть δ^-_v и δ^+_v — множество входящих и исходящих рёбер для вершины $v \in V'$. Следующие ограничения задают множество потоков, соответствующих движению вагонов:

(1) $$\sum_{a\in\delta_v^+} f_{ij}^a = n_{ij},\ \text{где } v = v_{i0}^{srt}, \quad \forall (i,j) \in O,$$

(2) $$\sum_{a\in\delta_v^-} f_{ij}^a = \sum_{a\in\delta_v^+} f_{ij}^a, \forall (i,j) \in O, \quad \forall v \neq v_{i0}^{srt}, v \neq v_{jH}^{srt},$$

(3) $$\sum_{a\in\delta_v^-} f_{ij}^a = n_{ij},\ \text{где } v = v_{jT}^{srt}, \quad \forall (i,j) \in O.$$

Ограничения (1) задают количество вагонов заказа (i,j), находящихся на станции i в начальный момент времени. Ограничения (3) задают количество вагонов заказа (i,j), находящихся на станции j в конечный момент времени. Условия (2) являются ограничениями сохранения потока.

Ограничения на максимальный вес и длину состава задаются следующим образом:

(4) $$\sum_{(i,j)\in O} l_{ij} \cdot f_{ij}^a \leq L, \forall a \in A^{mov},$$

(5) $$\sum_{(i,j)\in O} m_{ij} \cdot f_{ij}^a \leq M, \forall a \in A^{mov}.$$

Для балансировки загрузки станций вводятся ограничения на максимальное число обслуженных вагонов (сцепок и расцепок) в течение некоторого периода времени. Пусть P — множество интервалов времени, в течение которых на каждой станции может быть обслужено не более W вагонов. Ограничения балансировки гарантируют, что для каждого интервала времени из P и каждой станции $k \in N$ величина суммарного потока по рёбрам отцепки и прицепки на станции k, соответствующим прибывшим и отбывшим поездам в течение этого интервала, не превышает W:

(6) $$\sum_{(i,j)\in O} \sum_{\substack{\forall a = a_{qk}^{\mathrm{dwn}}: \\ t_{qk}^{\mathrm{in}} \in (t', t'']}} f_{ij}^a + \sum_{(i,j)\in O} \sum_{\substack{\forall a = a_{qk}^{\mathrm{up}}: \\ t_{qk}^{\mathrm{out}} \in (t', t'']}} f_{ij}^a \leq W,\ \ \forall k \in N,\ \ \forall (t', t''] \in P.$$

Для формулировки целевой функции введем бинарные переменные z. Переменная z_{ijt}, $(i,j) \in O$, $0 \leq t \leq H$ принимает значение 0 тогда и только тогда, когда все вагоны заказа (i,j) доставлены на станцию назначения к моменту времени t. Пусть I_i — множество интервалов времени (t,t'), соответствующих рёбрам $a_{itt'}^{srt}$. Ограничения, связывающие переменные z и f определяются как

(7) $$z_{ijt} \geq 1 - \frac{1}{n_{ij}} f_{ij}^a,\ \text{где } a = a_{jtt'}^{srt},\ \forall (i,j) \in O,\ \forall (t,t') \in I_j: t' > d_{ij}.$$

Используя переменные z, целевая функция минимизации взвешенного суммарного запаздывания может быть записана как

(8) $$\min \sum_{(i,j)\in O} \sum_{\substack{(t,t')\in I_j: \\ t' > d_{ij}}} w_{ij} \cdot (t' - \max\{t, d_{ij}\}) \cdot z_{ijt}.$$

Помимо описанной постановки, в ходе работы над проектом также рассмотрен случай, когда расписание поездов не задано, т.е. в дополнение к назначению грузовых вагонов на поезда, необходимо для каждого поезда определить его расписание (времена отбытия и прибытия на станции). Кроме того, изучена упрощенная постановка задачи, в которой мы пренебрегаем пропускной способностью путей и допускаем, что время движения поезда между двумя станциями является константой и не зависит от времени начала движения.

2. Задача оперативного управления движением составов

Рассматривается задача управления движением составов на некотором узле железных дорог. Сеть железных дорог на рассматриваемом узле разбивается на участки (границами участков являются путевые семафоры). На каждом из таких участков одновременно может находиться не более одного железнодорожного состава. Участки дороги пронумерованы $1,2,\ldots,M$, где $\mathcal{M} = \{ m_1,\ldots,m_M\}$ – множество участков. В случае, если между двумя соседними семафорами железная дорога имеет две колеи ("попутная" и "встречная"), то считаем, что заданы два участка дорог, т.е., если рассматривать участки как ресурсы, обслуживающие требования на проезд ж/д составов, то можно считать, что их мощность равна 1.

Среди множества участков выделяются следующие подмножества:

- участки, являющиеся смежными с соседними узлами железных дорог;
- внутренние участки.

Над множеством участков задано несимметричное отношение смежности. Два участка $\mathrm{m_i}$ и $\mathrm{m_j}$ считаем смежными в случае, если есть путевой семафор, расположенный на границах данных участков. Несимметричность данного отношения обусловлено тем, что в задаче необходимо выделить понятие движение по встречным путям. Таким образом, переход состава $\mathrm{m_i} \to \mathrm{m_j}$ соответствует движению в попутном направлении, а движение $\mathrm{m_j} \to \mathrm{m_i}$ — во встречном направлении. Существуют участки, для которых отношение смежности является симметричным. Обычно, такие участки располагаются в маневровых зонах, в которых нет необходимости выделять попутное и встречное направления движения.

Понятие несимметричности смежности участков будет использовано при решении задачи, когда движение по встречным путям будет допускаться в "крайнем" случае.

Множество составов V, для которых необходимо составить оперативное расписание движения на рассматриваемом узле, определяется следующим образом:

- рассматриваются составы, которые в момент начала вычислений находятся в движении внутри узла. Для таких составов имеем момент поступления $\mathrm{r_j} = 0$;
- рассматриваются составы, для которых известно время поступления в один из пограничных для узла участков (в которых данный узел "стыкуется" с соседними узлами железных дорог). Время поступления $\mathrm{r_j}$ для таких составов вычисляется относительно планового времени прибытия состава в пограничный участок;
- рассматриваются составы, которые находятся внутри узла, но фактически на момент начала вычислений не выполняют движение. Например, это грузовые составы, которые находятся на формировании в сортировочной зоне. Для таких составов также известно плановое время начала движения, которое принимается за $\mathrm{r_j}$.

Вычисляемое в рамках задачи расписание движения составов из множества V учитывает изначально заданные интервалы недоступности отдельных участков, которые обуславливаются:

- существующим расписанием движения пассажирских поездов и электричек, которые движутся относительно своего утвержденного графика;
- случаями выхода из строя отдельных участков в результате некоторых форс-мажорных обстоятельств (технических поломок, аварий, стихийные бедствия и проч.).

Интервалы доступности участков задаются в виде набора множеств $\mathrm{E_i} = \{[\mathrm{t'_{i1}}, \mathrm{t''_{i1}}], [\mathrm{t'_{i2}}, \mathrm{t''_{i2}}], \ldots\}, \mathrm{i} \in \mathcal{M}$.

Время прохождения состава некоторого участка вычисляется на основе максимально допустимой скорости движения состава и его длины и может корректироваться в процессе решения в меньшую сторону (что соответствует ситуации, когда состав должен ждать освобождения следующего по маршруту движения участка).

Каждому из составов $j \in V$ назначается приоритет (вес) w_j, который учитывается в процессе построения расписания движения составов. На первом этапе исследований рассматривались задачи, когда $w_j = 1,\ \forall j \in V$.

Задача построения оперативного движения составов формулируется следующим образом. Необходимо максимизировать пропускную способность рассматриваемого узла, т.е. обслужить как можно больше составов из множества V с учетом заданных весов составов w_j.
Таким образом, задача по формулировке близка классической NP-трудной задаче комбинаторной оптимизации задаче РАНЕЦ, для которой известны эффективные алгоритмы решения графического (динамического) типа.

В данной постановке задачи необходимо учесть следующие особенности.

- В начале вычислений необходимо зафиксировать правую границу интервала планирования T. Без этого невозможно рассматривать узел как "Ранец". В целом, данную величину можно определить естественным образом исходя из типа задачи:

  - если решается задача приведения в стационарное состояние, то интервал планирование определяется на основе времени устранения технической неисправности;

  - если решается задача построения расписания в штатном режиме, то интервал планирования определяется на основе некоторой заранее заданной константы.

- После фиксации интервала планирования необходимо учитывать, что некоторые составы физически не могут пройти узел за отведенное время. Поэтому при вычислении целевой функции полученного Ранца необходимо учитывать возможность "частичного помещения предмета в Ранец".

- В случае, когда все составы могут преодолеть узел без особых сложностей и взаимных конфликтов необходимо предварительно ввести в задачу "пустые" составы, наличие которых будет способствовать оптимизации прохождению реальных составов.

- Также, необходимо исключить искусственные простои поездов (что соответствует, в том числе, искусственному занижению скорости движения составов на свободных участках).

Под x_j будем понимать значение из интервала $[0,1]$, которое соответствует коэффициенту прохождения узла составом $j \in V$:

- $x_j = 0$ – состав не въехал в узел;

- $x_j = 1$ – состав проехал свой маршрут по участкам узла полностью;

- $0 < x_j < 1$ – состав проехал требуемый маршрут не полностью, значение равно отношению пройденного пути к длине всего маршрута.

Пусть $\alpha_j(t) \in \mathcal{M}$ обозначает участок, в котором находится состав $j \in V$ в момент времени t. Разобьем весь интервал планирования на равные подинтервалы, границами которых являются моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_T$. Количество таких точек разбиения соответствует допустимой дискретности рассматриваемого процесса движения составов.
Набор значений $\alpha_j = \{\alpha_j(t_1), \alpha_j(t_2), \ldots, \alpha_j(t_T)\}$ задает расписание (график) движения состава по маршрутам узла. Допустимым считается такой график, в котором:

- для любого $i \in \{1,2,\ldots,T-1\}$ участки $\alpha_j(t_i)$ и $\alpha_j(t_{i+1})$ являются смежными (по определению, участок смежен самому себе);

- для любого $i \in \{1,2,\ldots,T-1\}$ расстояние между центрами участков $\alpha_j(t_i)$ и $\alpha_j(t_{i+1})$

не должно быть больше дистанции, которую может пройти состав j за время $t_{i+1} - t_i$, двигаясь со своей нормативной скоростью;

- для любого $i \in \{1,2,\dots,T\}$ участок $\alpha_j(t_i)$ доступен для движения в момент времени t_i.

Задача оперативного управления движением составов заключается в максимизации взвешенной пропускной способности узла железных дорог:

(9)
$$\max_{0 \le x_j \le 1} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N$$

при условиях:

- существования допустимых расписаний α_j движения тех составов j, для которых $x_j > 0$. То есть, все составы, которые совершили движение по путям ж/д узла, выполнили это по допустимым расписаниям движения;
- отсутствия недопустимых пересечений графиков движения поездов, т.е. не существует расписаний движения двух составов j_1 и j_2, у которых для некоторого t выполняется $\alpha_{j_1}(t) = \alpha_{j_2}(t)$].

3. Задача формирования грузовых потоков

Рассмотрим связный неориентированный граф $G = (V, E)$ сети железных дорог. Пусть h_{ij} — длина ребра $(i,j) \in E$. В каждый период времени между вершинами $i,j \in V$ необходимо перевезти n_{ij} вагонов, т.е. $N = \{n_{ij}\}_{i,j \in V}$ — целочисленная, неотрицательная и несимметричная матрица.

Для транспортировки вагонов доступно некоторое количество идентичных составов, имеющих одинаковую вместимость $n_{\max}$.

Поезд доставляет вагоны из вершины $v \in V$ в вершину $w \in V$ по кратчайшему пути в графе G, временные затраты при этом составляют d_{vw} (включая прицепку, отцепку вагонов). Стоимость использования состава равна c_{vw}. Задачи, когда будут рассматриваться “не кратчайшие” пути, планируется исследовать в 2012 году.

Доставка заказа из i в j должна быть выполнена к директивному сроку $\bar{d}_{ij}$ и может быть осуществлена разными поездами на разных участках кратчайшего пути (в сложившейся ситуации) из i в j. Количество поездов, одновременно выходящих из вершины $v \in V$, не должно превышать q_v. Задача заключается в отыскании расписания, минимизируещего транспортные расходы, удовлетворяющего соответствующим ограничениям.

Для сокращения записи все заказы (i,j), $i \in V$, имеющие одинаковое назначение $j \in V$ будем обозначать j. Пусть $\bar{d}_j = \max_{i \in V} \bar{d}_{ij}$.
Рассмотрим полный ориентированный граф $K = (V, H)$, в котором составу, транспортирующему вагон из v в w соответствует дуга $(v,w) \in H$. Пусть граф $G_j = (V, A_j)$ — подграф G, ребра которого входят в кратчайшие пути к вершине j. A_j образует направленное остовное дерево с единственным путем из каждой вершины $i \in V \setminus \{j\}$ в j, являющимся кратчайшим путем относительно длин ребер h_{ij}. Рассмотрим транзитивное замыкание $G_j^+ = (V, H_j^+)$ графа G_j. Заметим, что оно является подграфом K. Таким образом, каждый путь доставки заказа (i,j) соответствует маршруту между i и j в графе G_j^+.

Формулировка задачи примет следующий вид:

(10a)
$$\min \sum_{(v,w) \in A} c_{vw} g_{vw}$$

(10b)
$$\sum_{(i,v) \in A_j^+} f^j_{i,v,d_{iv}} = n_{ij} \quad \forall i,j \in V,$$

$$\sum_{(w,v)\in A_j^+} f_{wvd}^j - \sum_{(v,w)\in A_j^+} f_{v,w,d+d_{vw}}^j = 0 \quad \forall v,j \in V, v \neq j,$$

(10c) $$\forall d \in \{1,2,\dots,\bar{d}_j\},$$

(10d) $$\sum_{(v,j)\in A_j^+} \sum_{d=1}^{\bar{d}_j} f_{vjd}^j = \sum_{i\in V\setminus\{j\}} n_{ij} \quad \forall j \in V,$$

(10e) $$\sum_{\substack{j\in V:\\ (v,w)\in A_j^+}} \sum_{d=1}^{\bar{d}_j} f_{vwd}^j \leq n_{\max} \cdot g_{vw} \quad \forall (v,w) \in A,$$

(10f) $$\sum_{w\in V\setminus\{v\}} g_{vw} \leq q_v \quad \forall v \in V,$$

$$f_{vwd}^j \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall j \in V, \quad \forall (v,w) \in A_j^+,$$

(10g) $$\forall d \in \{1,2,\dots,\bar{d}_j\},$$

(10h) $$g_{vw} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall (v,w) \in A,$$

где f_{vwd}^j — количество единиц товара $j \in V$, доставленных к сроку $d \in \{1,2,\dots,\bar{d}_j\}$ в вершину w составом, идущим без расформирования из v в w (по ребру $(v,w) \in H_j$); g_{vw} — количество составов, движущихся по $(v,w) \in H$ в каждый период времени.

Целевая функция (10a) минимизирует затраты на использование составов. Ограничения (10b)-(10d) гарантируют доставку всех товаров из пунктов отправления в пункты назначения. Условия (10e) означают, что не превышена вместимость составов. Наконец, неравенства (10f) обеспечивают выполнение ограничений на количество составов.

4. Задача формирования составов и расписания движения грузовых поездов

4.1. Общая постановка задачи

Предлагается к рассмотрению следующая проблема формирования составов и графиков движения грузовых поездов. Пусть S — множество станций, определяющих вершины графа G железнодорожной сети, соединенных однопутными или двухпутными дорогами. Дорога от одной станции до другой разбита семафорами на участки. Дано множество заказов N. Каждый заказ представляет собой один вагон, для которого известны пункт отправления и пункт назначения. Заказ $j \in N$ поступает на станцию в момент времени r_j и должен быть перевезен в пункт назначения не позже директивного срока $d_j = r_j + p_j + \Delta$, где p_j — продолжительность обслуживания заказа, которая определяется нормативно, Δ — известная константа. В случае невыполнения заказа начисляется штраф z_j. Каждый заказ характеризуется своей значимостью w_j и весом (массой) v_j.

Пусть L — множество имеющихся в наличии локомотивов, а B — множество локомотивных бригад. Под составом будем понимать объект, состоящий из трех элементов: вагонов, локомотива и локомотивной бригады. Для функционирования железнодорожной сети необходимо выполнение следующих ограничений.

1. Ограничения по составу. Количество вагонов в составе не должно превышать 71 вагон или быть меньше 30 вагонов. Вес состава ограничен 6000 тоннами.

2. Ограничения по горкам. На горке не может формироваться более некоторого фиксированного числа составов, зависящего от параметров горки (как правило, не более 10).

3. Ограничения по путям. На одном участке (от семафора до семафора) не может находиться более одного состава в одном направлении. Кроме того, грузовой состав может идти по участку только в заданные интервалы времени $[t_1, t_2], [t_3, t_4], \dots$ (остальное время может быть выделено под движение пассажирских составов, электричек или ремонт путей).

4. Ограничения по станциям. На станции $i \in S$ не может одновременно находиться более a_i составов.

5. Ограничения по локомотивам и локомотивным бригадам. Каждый локомотив l “приписан” к некоторому подмножеству станций G_l, причем $G = \bigcup_l G_l$, $\bigcap_{i \neq j} G_i = \emptyset$. Локомотивная бригада b_i закреплена за некоторой станцией и может “обслуживать” подграф G_i^b.

Необходимо так сформировать составы и графики их движения, чтобы не были нарушены ограничения.

Пусть C_j — время завершения j-го заказа (вагона). Можно рассмотреть несколько вариантов целевой функции.

1. Минимизация суммарного запаздывания:

$$\min \sum_{j \in N} w_j \max\{0, C_j - d_j\}.$$

2. Минимизация среднего времени нахождения состава в пути:

$$\min \sum_{j \in N} C_j.$$

3. Минимизации максимального временного смещения:

$$\min \max_{j \in N} \{C_j - d_j\}.$$

4. Выбор подмножества заказов $\overline{N} \subseteq N$, которые можно выполнить без нарушения директивных сроков, дающего максимальную прибыль:

$$\max \sum_{j \in \overline{N}} w_j - \sum_{j \in N \setminus \overline{N}} z_j.$$

Далее рассмотрим некоторые частные случаи описанной выше задачи.

4.1. Задачи с двумя станциями. Будем рассматривать случай, когда необходимо обслужить всего две станции, соединенные двухпутной железной дорогой. Для каждой из четырех представленных выше целевых функций будем рассматривать следующие ограничения.

1. Ограничения на длину и вес состава.
2. На одном участке не может находиться более одного состава в одном направлении.
3. Ограничение на количество локомотивов. (Начальный вариант: 1-2 локомотива).
4. Грузовой состав может идти по участку только в заданные интервалы времени $[t_1, t_2], [t_3, t_4], \ldots$.
5. На участке, соединяющем станции:
   — нет семафоров;
   — 1 семафор;
   — k семафоров.
6. Ограничение на количество составов на одной станции.

4.2. Задачи с цепочкой станций. В данном случае все станции расположены последовательно. Начальный вариант — 3 станции. Для каждой из четырех представленных выше целевых функций будем рассматривать ограничения 1–6, представленные выше.

4.3. Задачи с замкнутой цепочкой станций. В отличие от предыдущего раздела, цепочка последовательно расположенных станций замкнута. Начальный вариант — 3 станции, расположенные в форме треугольника. Для каждой из четырех представленных выше целевыхфункций будем рассматривать ограничения 1–6.

4.4. Задачи со станциями, расположенными в форме звезды. Будем рассматривать четыре станции с расположением в форме звезды в условиях ограничений 1–6.

5. Алгоритмы решения задач с двумя станциями

В данном разделе перечислены задачи, для которых удалось разработать точные полиномиальные алгоритмы решения.

5.1 Задача минимизации среднего времени выполнения заказов для двух станций с одним локомотивом

Для решения данной задачи предложен алгоритм динамического программирования, сложность которого составляет $O(n^4)$, где n — количество заказов.

5.2 Задача составления расписания движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой

Задачи перевоза грузов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой (Single Track Railway Scheduling Problem with two stations, STRSP2) удалось свести к одноприборным задачам теории расписаний специального вида, для которых предложены алгоритмы динамического программирования. Рассмотрены различные варианты целевых функций.

Табл. 1 содержит обобщенную информацию по предложенным алгоритмам и задачам, для которых они могут использоваться, где задачи обозначены в соответствии с принятой в теории расписаний трехпозиционной системой обозначений [2].

Таблица 1: Сложность предложенных алгоритмов для разных типов задач.

Железнодорожная задача	Соответствующая задача для одного прибора	Сложность алгоритма
$STRSP2\|r_j\|C_{max}$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p, r_j\|C_{max}$	$O(n^7)$
$STRSP2\|r_j\|\sum C_j$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p, r_j \sum C_j$	$O(n^7)$
$STRSP2\|\|\sum w_jC_j$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p\|\sum w_jC_j$	$O(n^6)$
$STRSP2\|\|\sum T_j$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p\|\sum T_j$	$O(n^6)$
$STRSP2\|\|\sum U_j$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p\|\sum U_j$	$O(n^7 \log n)$
$STRSP2\|\|\sum w_jU_j$	$1\|setup-times, N_1, N_2, p_j = p\|\sum w_jU_j$	$O(n^{15})$

5.3 Задача минимизации максимального взвешенного временного смещения выполнения заказа для двух станций

Для данной задачи разработан алгоритм динамического программирования, общая трудоёмкость которого составляет $O(n^6/k^2)$ операций, где k — количество вагонов в составе.

Кроме того показано, что задачи с двумя станциями, соединенными двухпутной железной дорогой, при отсутствии ограничений на локомотивы и в случае монотонной регулярной целевой функции могут быть сведены к известной задаче комплектования работ (batching problem), для которой существует полиномиальный алгоритм решения [3].

Литература

1. *Jha K.C., Ahuja R.K., Sahin G.* New Approaches for Solving the Block-to-Train Assignment Problem // Networks. Vol 51. 2008. №1. P. 48–62.

2. *Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic machine scheduling: a survey // Ann. Discrete Math. Vol. 5. 1979. P. 287–326.

2. *Ph. Baptiste.* Batching identical jobs // Mathematical Methods of Operations Research. Vol. 52. 2000. P. 355–367.