# ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗОВЫХ СОСТАВОВ МЕЖДУ ДВУМЯ СТАНЦИЯМИ[1]

**Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Ласкова М.В.**
*(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)*
lazarev@ipu.rssi.ru, musatova@ipu.ru, laskovayamaya@moscow-index.ru

*Аннотация:*
*Рассматривается задача составления плана движения грузовых составов между двумя станциями, соединенными одноколейной железной дорогой. Предлагается эвристический алгоритм решения поставленной задачи, минимизирующий суммарное запаздывание прибытия грузовых составов.*
Ключевые слова: теория расписания, суммарное запаздывание, железнодорожный транспорт.

## *Введение*

Железные дороги прочно занимают ведущее положение в транспортной системе России. Железнодорожным транспортом осуществляется около 80% всего грузооборота (с учетом трубопроводного транспорта – 40%) [1],[2]. Однако количество грузовых составов, прибывающих с опозданием, за последние годы возросло с 10-11% до 18% [3]. Железнодорожные компании, осуществляющие перевоз грузов, несут убытки вследствие простоя составов или несвоевременной доставки груза. С ростом количества перевозимых железнодорожных грузов из одних городов в другие возникает необходимость увеличения пропускной способности железнодорожных линий. Это увеличение может быть достигнуто различными способами. Первый способ — разработка оптимальных планов движения поездов. Второй способ — внедрение мощной техники, электрификация дорог, постройка вторых путей и двухпутных вставок. Мероприятия, связанные с применением новой техники и выполнением строительных работ требуют значительных капитальных и временных затрат. Поэтому на некотором промежуточном этапе до закупки, внедрения новой техники и постройки дополнительных железнодорожных путей и станций необходимо разрабатывать проекты, реализующие оптимальные графики движения. В частности, это касается однопутных дорог, так как на данный момент они по-прежнему составляют большую часть суммарной длины железных дорог всего мира [4]. Задачам, связанным с построением расписания движения по однопутным дорогам, посвящено достаточно много современных публикаций (см., например, обзор [5]).

В статье предлагается рассмотреть задачу передвижения составов между двумя станциями, соединенными одноколейной железной дорогой, для которых необходимо составить план отправления составов.

## *1. Математическая постановка задачи*

### *1.1. Постановка задачи*

Рассматривается задача формирования расписания движения железнодорожных составов между двумя станциями при условии, что станции соединены одноколейной дорогой.

Пусть известны следующие параметры следования составов:
$N = N_1 \cup N_2$ — множество составов;
$N_1 = \{1,2, \dots n\}$ — множество составов, поступивших на первую станцию;
$N_2 = \{1,2, \dots m\}$ — множество составов, поступивших на вторую станцию;

[1]*Статья выполнена при финансовой поддержке гранта 11-08-13121-офи-м-2011-РЖД.*

$r_i^1$ — время поступления $i$-го, $i \in N_1$, состава на первую станцию для отправки ее на вторую станцию;
$r_j^2$ — время поступления $j$-го, $j \in N_2$, состава на вторую станцию для отправки ее на первую станцию;
$d_i^1$ — директивный срок прибытия $i$-го состава с первой станции на вторую;
$d_j^2$ — директивный срок прибытия $j$-го состава со второй станции на первую.

Будем полагать, что $d_i^s = r_i^s + p,\ s \in \{1,2\}$, где $p$ — продолжительность выполнения перевоза состава с грузом (считаем, что $p$ – постоянная величина, равная отношению расстояния между двумя станциями к средней скорости движения состава). При движении составов в одном направлении между подряд идущими поездами должна соблюдаться дистанция $\delta \geq 0$ единиц времени.

Необходимо составить расписание $\pi$ движения поездов между двумя станциями, т.е. определить моменты времени $S_i^1$, $S_j^2$ отправления $i$-го состава с первой станции на вторую и $j$-го состава со второй станции на первую, соответственно.

Обозначим через $C_i^1 = S_i^1 + p$, $C_j^2 = S_j^2 + p$ моменты прибытия составов в пункты назначения, $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Будем рассматривать целевые функции $F(\pi)$, возникающие на практике.

1. Минимизация суммарного запаздывания:

$$T_{\Sigma}(\pi) = \sum_{j \in N} \max\{0, C_j - d_j\}.$$

2. Минимизация максимального смещения:

$$L_{max}(\pi) = \max_{j \in N}\{C_j - d_j\}.$$

3. Минимизация времени окончания работ:

$$C_{\max}(\pi) = \max_{j \in N} C_j.$$

Функция минимизации суммарного запаздывания актуальна для железнодорожных компаний, осуществляющих грузовые перевозки, так как в случае невыполнения сроков доставки грузов, компания возмещает штраф, неся убытки. С помощью функции минимизации максимального смещения можно определить значение верхней оценки запаздывания всех составов. Функция минимизации времени работ $C_{\max}$ необходима в том случае, когда выгоднее закончить все работы как можно раньше. Данный случай может быть связан с ограничением некоторых ресурсов, началом ремонтных работ и т.д.

Не теряя общности, будем полагать, что составы, поступившие на первую и вторую станции, пронумерованы по неубыванию момента поступления, т.е. $r_1^1 \leq r_2^1 \leq \cdots \leq r_n^1$ и $r_1^2 \leq r_2^2 \leq \cdots \leq r_m^2$. Представим движение составов с помощью графика. По горизонтальной оси отмечены моменты поступления $r_1^1, r_2^1, \dots, r_n^1$ и $r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2$ составов соответственно на первую и вторую станции (см. рис.1). На вертикальной оси обозначены положения станций 1, 2.

*1.2. Пример 1*

Рассмотрим пример со следующими параметрами: $r^1 = \{0,1,3,7,8\}$, $r^2 = \{0,2,3,5,7\}$, $p = 5$, $\delta = 0$.

Отметим в порядке возрастания моменты поступления составов на станции 1 и 2. Будем считать, что поезд на участке между двумя станциями движется с некоторой постоянной скоростью. В таком случае линии, характеризующие движение составов, имеют постоянный угол наклона к оси времени. Задача заключается в смещении некоторых линий вправо так, чтобы графики движения составов, идущих в противоположных направлениях, не пересекались за пределами станций.

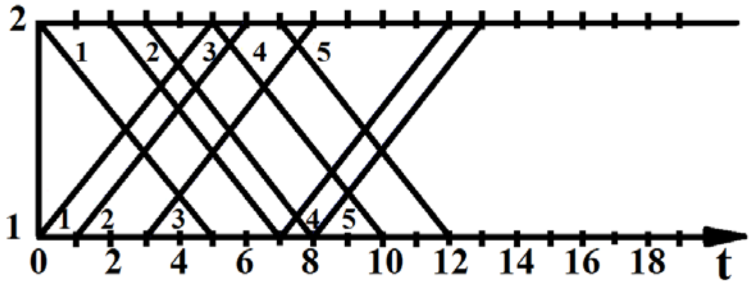


*Рис. 1.*

Для данного примера рассмотрим оптимальные значения задач при различных целевых функциях. Оптимальное расписание, удовлетворяющее условию минимума первых двух целевых функций, описанных выше, представлено на рис.2., решение для последней задачи изображено на рис.3. Первоначальное расположение составов отмечено прерывистыми линиями.

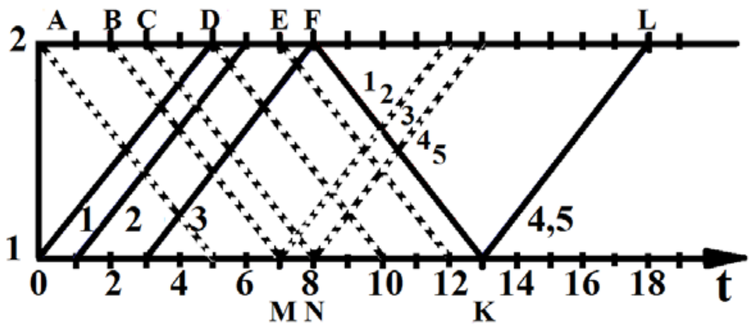


*Рис.2.*

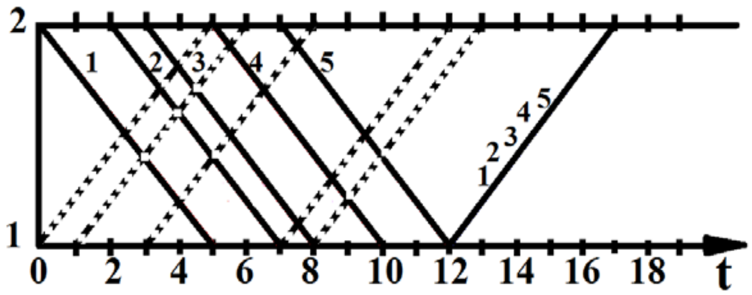


*Рис.3.*

1. Функция минимума суммарного запаздывания всех составов: $T_{\sum}(\pi) = AF + BF + CF + DF + EF + MK + NK = 34$ (см. рис.2).
2. Функция минимума максимального смещения: $L_{max}(\pi) = 8$ (см. рис.2).
3. Функция минимизация общего времени окончания движения всех составов: $C_{\max}(\pi) = 17$ (см. рис.3).

*1.3. Замечание 1*

*Один из наиболее распространенных случаев, рассматриваемых в литературе, соответствует варианту $\delta = p$, т.е. на железнодорожном пути одновременно может находиться* *не более одного состава. При этом все параметры поступления составов 1 и 2 станций могут быть упорядочены в одну последовательность в порядке неубывания: $r'_1 \le r'_2 \le \dots \le r'_{n+m}$, при этом $d'_1 \le d'_2 \le \dots \le d'_{n+m}$. В результате задача сводится к задаче обслуживания $m+n$ требований на одном приборе с согласованными временами поступления и директивными сроками. Для решения подобных задач существует ряд полиномиальных алгоритмов [6-8].*

*1.4. Замечание 2*

В случае $\delta = 0$, для задачи минимизации времени окончания работ $C_{max}$ задача имеет тривиальное решение:

1) если $\min\{r_m^2, r_n^1\} + p \le \max\{r_m^2, r_n^1\}$, то $C_{max} = \max\{r_m^2, r_n^1\} + p$;

2) если $\min\{r_m^2, r_n^1\} + p > \max\{r_m^2, r_n^1\}$, то $C_{max} = \min\{r_m^2, r_n^1\} + 2p$.

Далее будем полагать, что $\delta = 0$, т.е. временная задержка любого состава пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием от одной до другой станции. Для данного случая ниже предлагается эвристический алгоритм решения задачи, имеющей в качестве целевой функции минимальное значение суммарного запаздывания по всем составам.

## 2. Эвристический алгоритм решения задачи двух станций в случае минимизации суммарного запаздывания составов

Видно, что при оптимальном расписании составы могут отправляться либо в моменты поступления $r_i^1, r_j^2$, либо в моменты прибытия предыдущих составов на станции назначения $r_i^1 + lp, r_j^2 + mp,\ l, m \in N$. Обозначим множество таких точек за $T$.

В качестве начального допустимого расписания выберем следующее. На первом шаге составы, идущие со второй станции, будем отправлять одновременно в момент времени $S_1 = r_m^2$, имея при этом начальное запаздывание всех составов второй станции $F_1^2(S_1)$, где

$$F_1^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} (t - r_j^2).$$

Тогда составы первой станции идут без задержек, если $r_i^1 \le S_1 - p$ или $r_i^1 \ge S_1 + p$. В противном случае суммарное запаздывание составов первой станции будет равным $F_1^1(S_1)$, где

$$F_1^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I(t)} p - (r_i - t),$$

$$I(t) = \{i : t - p < r_i < t + p\}.$$

Далее рассмотрим моменты времени $t \in T, t \ge S_1$. Выберем $S_1^*$, при котором достигает минимум целевая функция $F_1(t) = F_1^1(t) + F_1^2(t)$. Пусть $\pi_1$ — полученное в этом случае расписание.

На втором шаге фиксируем время отправления $m$–го состава в положении $S_1^*$, а для остальных $m-1$ составов находим момент $S_2^*$: $r_{m-1}^2 \le S_2 \le S_1^*$, при котором достигает минимум целевая функция.

Пусть уже определены моменты $S_k^* \le S_{k-1}^* \le \dots \le S_2^* \le S_1^*$ отправления составов станции 2 (при этом первые $(m-k+1)$ составов отправляются в момент времени $S_k^*$). Пусть $\tau_1^k \le \tau_2^k \le \dots \le \tau_{n-1}^k \le \tau_n^k$— моменты отправления составов первой станции, соответствующие расписанию $\pi_k$, составленном на $k$-ом шаге.

На $(k+1)$-ом шаге фиксируем моменты отправления $S_k^*, S_{k-1}^*, \dots, S_2^*, S_1^*$ $k$ составов второй станции, а для $m-k$ оставшихся находим время отправления, перебирая возможные моменты $t \in T :\ r_{m-k}^2 \le t \le S_k^*$. Суммарное запаздывание составов второй станции в этом случае вычисляется по формуле

$$F_{k+1}^2(t) = \sum_{j=1}^{k} (S_j^* - r_{m-j+1}^2) + \sum_{j=1}^{m-k} (t - r_j^2).$$

Покажем, как при этом изменяется расписание движения составов первой станции. Обозначим через $J^{k+1}(t) = \{i: t - p \le \tau_i^k \le t + p\}$ множество моментов отправления составов первой станции, которые необходимо изменить в случае, когда составы отправляются со второй станции в момент $t$. Определим новое расписание отправления составов с первой станции следующим образом:

$$\tau_i^{k+1} = \begin{cases} \tau_i^k, & \text{если } i \notin J^k(t); \\ t + p, & \text{если } i \in J^k(t) \text{ и } S_k^* - t \ge 2p; \\ \tau_{q+1}^k, & \text{если } i \in J^k(t) \text{и } S_k^* - t < 2p, \end{cases}$$

где $q = \max\{i: i \in J^k(t)\}$.

Суммарное запаздывание составов первой станции вычисляется по формуле

$$F_{k+1}^1(t) = \sum_{i=1}^{m} (\tau_i^{k+1}(t) - r_i^1).$$

Среди моментов времени $t \in T$, $r_{m-k}^2 \le t \le S_k^*$ выбираем тот, который доставляет минимум функции запаздывания составов $F_{k+1}(t) = F_{k+1}^1(t) + F_{k+1}^2(t)$.

В результате получаем невозрастающую последовательность значений целевой функции задачи $F_1 \ge F_2 \ge \cdots \ge F_{m-1} \ge F_m$, каждое из которых соответствует допустимому расписанию.

Ниже на рис. 4 приведен алгоритм построения расписания на $(k+1)$-ом шаге. Пусть моменты $t_j \in T$ возможных отправлений упорядочены по возрастанию.

Введем следующие обозначения:

- $t$ — текущий момент возможного времени отправления группы составов со второй станции;
- $\tau_i$, $i = 1, \dots, n$, —текущее расписание составов первой станции;
- $\tau_i^{\min}$, $i = 1, \dots, n$, — моменты отправления составов с первой станции, доставляющие минимум целевой функции на $(k+1)$-ом шаге;
- $T_\Sigma$ — суммарное запаздывание составов;
- $T_\Sigma^{min}$ — минимальное значение целевой функции на $(k+1)$-ом шаге;
- $l_{min}$ — номер первого возможного момента отправления ($t_{l_{min}} = r_{m-k}^2$);
- $l_{max}$ — номер последнего возможного момента отправления ($t_{l_{max}} = S_k^*$);
- $t_{\min}$ — момент времени отправления группы составов со второй станции, доставляющий минимум целевой функции на $(k+1)$-ом шаге;
- $T_\Sigma^1(t, \tau)$ — функция вычисления суммарного запаздывания составов первой станции:
$$T_\Sigma^1(t, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \left(\tau_i - r_i^1\right);$$
- $T_\Sigma^2(\mathrm{t})$ — функция вычисления суммарного запаздывания составов второй станции:
$$T_\Sigma^2(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(S_j^* - r_{m-j+1}^2\right) + \sum_{j=1}^{m-k} \left(t - r_j^2\right);$$
- $Inc(i, t)$ — функция проверки принадлежности номера $i$ множеству $J^{k+1}(t)$:
$$Inc(i, t) = \begin{cases} true, & \text{если } i \in J^{k+1}(t); \\ false, & \text{если} \notin J^{k+1}(t). \end{cases}$$

**Алгоритм построения допустимого расписания на $(k+1)$-ом шаге**

$T_{\sum}^{min} \leftarrow F_k(S_k^*)$;
**for** $\mathrm{j} = [l_{min}; l_{max}]$; $\mathrm{j} \leftarrow \mathrm{j}+1$ **do**
    $\mathrm{t} \leftarrow t_j$;
    **for** $\mathrm{i} = [1; n]$; $\mathrm{i} \leftarrow \mathrm{i}+1$ **do**
        **if** $\mathrm{Inc(i,t)} = false$ **then**
            $\tau_i \leftarrow \tau_i^k$;
        **else**
            **if** $S_k^* - \mathrm{t} \geq 2p$ **then**
                $\tau_i \leftarrow \mathrm{t} + p$;
            **else**
                $\tau_i \leftarrow \tau_{q+1}^k$;
    $\mathrm{T} \leftarrow T_{\sum}^1(\mathrm{t}, \tau) + T_{\sum}^2(t)$;
    **if** $T_{\sum}^{min} > T_{\sum}$ **then**
        $T_{\sum}^{min} \leftarrow T_{\sum}$;
        $t_{min} \leftarrow \mathrm{t}$;
        **for** $\mathrm{i} = [1; n]$; $\mathrm{i} \leftarrow \mathrm{i}+1$ **do**
            $\tau_{min} \leftarrow \tau_i$.

*Рис. 4*

## *Литература*


1. *Лапидус Б.М.* Макроэкономическая роль железных дорог, 2006 г.
2. *Мачерет Д.А.* Планирование и регулирование работы железнодорожного транспорта // Экономика железных дорог, 1999 г., №1.
3. Анализ рынка услуг в сфере перевозок грузов. Доклад 9-ой Международной конференции “Рынок транспортных услуг: взаимодействие и партнерство”, 2011 г.
4. *Меллит Б.* Режим эксплуатации на железных дорогах Великобритании// Железные дороги мира, 1998 г., №9, с.15-19.
5. *R.M. Lusby, J.Larsen, M.Ehrgott, D. Ryan. Railway track allocation: models and methods. Operational Research Spectrum 33:843-883, 2011.*
6. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора. М.:ВЦ РАН, 2006 г., 134 С.
7. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.:МГУ, 2011 г., 224 С.
8. *E. Gafarov, A.Lazarev, F.Werner. Transforming a pseudo-polynomial algorithm for the single machine total tardiness maximization problem into polynomial one. Annals of Operations Research.* DOI 10.1007/s10479-011-1055-4.