PACS 02.30.Yy

© 2011 г. А. В. Мокряков, канд. физ.-мат. наук,
В. И. Цурков, д-р. физ.-мат. наук

ВОССТАНОВЛЕНИЕ 2-КОМЛПЕКСОВ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННОМУ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОМУ ВЕКТОРУ[1]

Гиперграфы в последнее десятилетие активно используются в задачах электротехники, в проектировании сетей, в многоиндексных транспортных задачах, в компьютерном моделировании сложных динамических систем, в представление сложных систем управления на производстве и других прикладных областях науки. Для части задач (например многоиндексные транспортные задачи) лучше подходит представление в виде 2-комплексов — отдельного класса гиперграфов, в котором каждое ребро инцидентно ровно 3-вершинам. Известно, что каждому гиперграфу соответствует вектор степеней его вершин, но обратное не верно. В работе рассматривается вопрос восстановления (построения, реализации) 2-комплекса по произвольно взятому вектору.

Ключевые слова: графы, гиперграфы, комплексы, редукционный алгоритм.

1. Введение

Здесь получен редукционный критерий реализуемости вектора в 2-комплекс (подкласс гипреграфа [1, 2]). Комплексы широко применяются в многоиндексных транспортных задачах [3], компьютерном моделировании сложных динамических систем и других областях науки. Эта статья является продолжением работ [4] – [8]. Все построения и конструкции основанны на введённых понятиях приводимости вектора и редукционного вектора для 2-мерного случая. При этом редукционные необходимые и достаточные условия реализуемости вектора в комплекс строятся по аналогии с критериями реализуемости вектора в граф. Один из указанных критериев реализуемости в граф принадлежит Хакими Л. [9], который ввёл понятия приводимый вектор и редукционный вектор для 1-мерного случая. Другой критерий реализуемости предложен А. А. Мироновым. Он обобщает критерий Хакими и позволяет строить «большее» количество реализаций вектора [7].

2. Реализуемость 2-комплекса

В работе рассматриваются комплексы следующего вида.

Определение 1. Для множества вершин $U(n)$, где $n \geqslant 2$, через

$$S^3(n) = \left\{\{u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}\} : u_{i_j} \in U(n),\ u_{i_p} \neq u_{i_q} \text{ при } p \neq q\right\}$$

обозначим множество всех 3-элементных подмножеств из $U(n)$. Пара множеств $\{U(n),\ S^3\}$, где $S^3 \subseteq S^3(n)$, которую обозначим

$$G^2 = G^2\left(U(n),\ S^3 = S^3\left(G^2\right)\right),$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №11-01-92691-ИНД).

называется 2*-комплексом.*

Мощность множества M обозначим $|M|$. Очевидно, что

$$\left|S^3(n)\right| = C_n^3.$$

В трёх следующих определениях применим терминологию из теории графов.

Определение 2. Для 2*-комплекса* $G^2 = G^2\left(U(n),\ S^3\right)$ *вершины* $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}$, *называются смежными, если они принадлежат некоторому симплексу из* S^3. *Симплекс* $\{u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}\}$ *из* S^3 *называется инцидентным каждой вершине* u_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant 3$, *а каждая из вершин* u_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant 3$, *называется инцидентной симплексу.*

Замечание 1. Множество 2-комплексов $\Gamma^2(n) = \{G^2\left(U(n),\ S^3\right)\}$ есть подмножество всех 2-мерных комплексов с множеством вершин $U(n)$.

Определение 3. Степенью каждой вершины $u_i \in U(n)$ 2*-комплекса* $G^2 = G^2\left(U(n),\ S^3\right)$ *называется количество* 2*-мерных симплексов, инцидентных вершине* u_i*:*

$$\deg_2 u_i = \left|\left\{\{u_i, u_{i_1}, u_{i_2}\} \in S^3\right\}\right|.$$

Определение 4. Целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ *называется реализуемым в* 2*-комплекс, если существует такой* 2*-комплекс* $G^2\left(\mathbf{A}\right) = G^2\left(U(n),\ S^3\right)$, *что степень каждой вершины* u_i *равна* a_i *(*$\deg_2 u_i = a_i$*), то есть любая вершина* u_i *инцидентна* a_i *симплексам размерности* 2*. Комплекс* $G^2\left(\mathbf{A}\right)$ *называется* 2*-реализацией вектора* $\mathbf{A}$.

Пусть n-координатный вектор $\mathbf{A}$ реализуем в 2-комплекс. Так как каждый 2-мерный симплекс произвольного 2-комплекса $G^2\left(\mathbf{A}\right) = G^2\left(U(n),\ S^3\right)$ инцидентен 3 вершинам, то имеет место

Теорема 1. Если целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ *реализуем в* 2*-комплекс, то*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 3 \cdot q, \ \textit{где } q \in \mathbb{Z},$$

причём, q *— количество* 2*-мерных симплексов любого* 2*-комплекса* $G^2\left(\mathbf{A}\right)$

В следующем утверждении также заключены необходимые и условия реализуемости вектора в 2-комплекс.

Теорема 2. Пусть целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ *реализуем в* 2*-комплекс. Тогда*

а) $a_i \leqslant C_{n-1}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

б) $3 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

3. Приводимые векторы.

Здесь вводятся понятия 2-приводимого вектора и редукционного вектора (в 2-мерном случае). На основе этих понятий и будет получен критерий реализуемости целочисленного неотрицательного вектора в 2-комлекс.

Понятие 2-приводимости, введенное ниже, означает следующее: если (не ограничивая общности) $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$, то существует граф G^1 со множеством вершин $U(n) \setminus u_1$ такой, что имеет место

$$\text{а) } \deg_1 u_i \leqslant a_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$
$$\text{б) } \sum_{i=2}^{n} \deg_1 u_i \geqslant 2a_1.$$

Для 2-приводимого вектора $\mathbf{A}$ из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$ при $n \geqslant 4$ можно перейти к вектору (редукционному) $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ такому, что для векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и набора степеней вершин $U(n) \setminus u_1$ графа G^1 справедливы соотношения

$$\text{а) } \sum_{i=2}^{n} (a_i - b_{i-1}) = 2a_1,$$
$$\text{б) } \deg_1 u_i \leqslant b_{i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

Если вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$ 2-приводим, то при условии его реализуемости в 2-комплекс $G^2(\mathbf{A})$ можно построить все 2-мерные симплексы смежные вершине u_1, и перейти к вектору (редукционному) $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ для того, чтобы построить реализацию в 2-комплекс вектора $\mathbf{B}$ (в следующем пункте выводится правило построения вектора $\mathbf{B}$, что при реализуемости вектора $\mathbf{A}$ в 2-комплекс, вектор $\mathbf{B}$ также реализуем в 2-комплекс).

Понятие 2-приводимости вектора $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ выразим с помощью количества рёбер графа с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, у которого степени вершин не превосходят координат вектора $(a_2, \ldots, a_n) : \deg_1 u_i \leqslant a_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$.

Определение 5. Вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}_+^n$ *называется вписанным в вектор* $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n$, *если* $b_i \leqslant a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *и строго вписанным, если вектор* $\mathbf{B}$ *вписан в вектор* $\mathbf{A}$, *но не равен ему.*

Условие вписанности и строгой вписанности вектора $\mathbf{B}$ в вектор $\mathbf{A}$ будем соответственно обозначать $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{A}$ и $\mathbf{B} < \mathbf{A}$ или $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} > \mathbf{B}$.

Для вектора $\mathbf{A}$ из $\mathbb{Z}_+^n$ введём обозначение множества вписанных в $\mathbf{A}$ векторов, реализуемых в граф

$$\mathfrak{M}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{B} \in \mathbb{Z}_+^n : \mathbf{B} \leqslant \mathbf{A}, \text{ существует граф — реализация } G^1(\mathbf{B})\}.$$

На понятиях вписанности векторов и реализуемости вектора в граф основано определение 2-приводимости вектора.

Для вектора $\mathbf{A}$ через $\mathbf{A}(p) = (a_{1,p}, \ldots, a_{n-1,p}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ обозначим вектор, образованный из $\mathbf{A}$ удалением p–ой координаты:

$$a_{i,p} = \begin{cases} a_i, \ 0 < i < p, \\ a_{i+1}, \ p \leqslant i < n. \end{cases}$$

Определение 6. Вектор $\mathbf{A}$ *из* $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$, *где* $n \geqslant 3$, *называется 2-приводимым, если*

$$a_1 \leqslant \left(\max_{\mathbf{D}=(d_1,\ldots,d_{n-1}) \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}(1))} \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) \Big/ 2,$$

где $\mathbf{A}(1) = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n-1}) = (a_2, \ldots, a_n)$.

Применяя идеи алгоритма Хакими, покажем как для произвольного вектора $\mathbf{A}$ из $\overline{\mathbb{Z}}_{+}^{n}$, где $n \geqslant 3$, можно в вектор $\mathbf{A}(1) = (a_2, \ldots, a_n)$ вписать вектор, реализуемый в граф $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ с наибольшим количеством рёбер. Тогда 2-приводимость исходного вектора означает:

а) что координата a_1 не превосходит количества рёбер графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$;

б) в случае реализуемости вектора $\mathbf{A}$ в 2-комплекс существует комплекс $G^2(\mathbf{A})$, в котором некоторое подмножество рёбер графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ в количестве a_1 образуют с первой вершиной 2-мерные симплексы;

в) указанное в пункте б) подмножество рёбер образует 1-срез комплекса $G^2(\mathbf{A})$ (при 2-реализуемости $\mathbf{A}$).

Из выше указанного, следует

Лемма 1. Если вектор $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_{+}^{n}$, *где* $n \geqslant 3$, *реализуем в* 2-*комплекс, то* $\mathbf{A}$ — 2-*приводим.*

Замечание 2. Понятие 2-приводимости можно определить и для векторов, координаты которых не упорядочены по невозрастанию. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_{+}^{n}$, где $n \geqslant 3$, и $a_p = \max\limits_i a_i$. Тогда вектор $\mathbf{A}$ называется 2-приводимым, если

$$a_p \leqslant \left(\max_{\mathbf{D}=(d_1,\ldots,d_{n-1}) \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}(p))} \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) \Big/ 2;$$

Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_{+}^{n}$, где $n \geqslant 3$. Переобозначим вектор $\mathbf{A}(1)$: $\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}_2 = (a_2, \ldots, a_n) = (a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)})$. Применяя идеи, содержащиеся в алгоритме (теореме) Хакими, для вектора $\mathbf{A}_2$

а) найдём вектор $\mathbf{C}(\mathbf{A}_2) = \mathbf{C} = (c_2, \ldots, c_n) \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$, для которого

$$\sum_{i=2}^{n} c_i = \max_{\mathbf{D}=(d_2,\ldots,d_n) \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}_2)} \sum_{i=2}^{n} d_i, \tag{1}$$

б) построим граф $G^1_{\mathbf{A}(1)} = G^1(\mathbf{C})$ — реализацию вектора $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_2)$ с множеством вершин $U(n) \setminus u_1 = \{u_2, \ldots, u_n\}$.

Из (1) будет следовать, что граф $G^1(\mathbf{C})$ содержит наибольшее количество рёбер для множества всех графов, векторы степеней вершин которых вписаны в вектор $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$.

Напомним, что граф-звезда — это граф, в котором все рёбра имеют общую инцидентную этим рёбрам вершину (вполне несвязный граф относится к классу графов-звёзд).

При построении вектора $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_2)$ и графа $G^1(\mathbf{C})$ будем применять формулу $l_{\mathbf{A}_k}(0) = \{i : a_i = 0,\ k+1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $\mathbf{A}_k = (a_k, \ldots, a_n)$.

Пусть $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathbb{Z}}_{+}^{n}$, где $n \geqslant 3$. Не ограничивая общности будем полагать, что $a_1 > 0$. Напомним, что по определению нулевой вектор реализуем во вполне несвязный 2-комплекс.

4. Алгоритм усечения

Алгоритм 1. Построение вектора $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_2)$ и графа $G^1(\mathbf{C})$, содержащего наибольшее количество рёбер в множестве всех графов, векторы степеней вершин которых вписанны в вектор $\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}_2 = (a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)})$

Для вектора $\mathbf{A}_2$ найдём число α_2 и координаты вектора $\mathbf{A}_3 = (a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(3)}) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n-2}$ по следующим правилам:

$$\alpha_2 = \begin{cases} n - 2 - l_{\mathbf{A}_2}(0), & a_2^{(2)} \geqslant n - 2 - l_{\mathbf{A}_2}(0), \\ a_2^{(2)}, & a_2^{(2)} < n - 2 - l_{\mathbf{A}_2}(0). \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant a_i^{(2)} - a_i^{(3)} \leqslant 1, \ 3 \leqslant i \leqslant n, \\ \sum\limits_{i=3}^{n} (a_i^{(2)} - a_i^{(3)}) = \alpha_2, \\ a_i^{(3)} \geqslant a_m^{(3)}, \ a_i^{(2)} > a_m^{(2)}, \\ a_i^{(3)} \geqslant a_m^{(3)}, \ a_i^{(2)} = a_m^{(2)}, \ i < m. \end{cases} \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) задают граф-звезду G_2^1 с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, в котором вершины u_q и u_i, где $q < i$, смежны тогда и только тогда, когда $q = 2$ и $a_i^{(2)} - a_i^{(3)} = 1$, $3 \leqslant i \leqslant n$ (этот граф-звезда имеет изолированные вершины при $\alpha_2 < n - 2 - l_{\mathbf{A}_2}(0)$). Очевидно, что количество рёбер графа G_2^1 равно α_2.

Вектор $\mathbf{A}_3$ называется *усечённым* для вектора $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$, а операция перехода от вектора $\mathbf{A}_2$ к вектору $\mathbf{A}_3$ называется операцией *усечения* вектора $\mathbf{A}_2$. Последние два условия из (3) показывают, что при усечении вектора $\mathbf{A}_2$, на единицу уменьшаются наибольшие координаты вектора $(a_3^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)})$ таким образом, что $(a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(3)}) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n-2}$.

Предположим, что при $n \geqslant k + 1$ проведена $(k-2)$–ая операция усечения для вектора $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$: найдено число α_{k-1} и построены усечённый вектор $\mathbf{A}_k = (a_k^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n-k+1}$ и граф-звезда G_{k-1}^1 с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, где вершины из множества $\{u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ образуют вполне несвязный подграф и каждое ребро этого графа инцидентно вершине u_{k-1}, а также инцидентно той вершине из множества $\{u_k, \ldots, u_n\}$, для которой $a_i^{(k-1)} - a_i^{(k)} = 1$.

В случае $n \geqslant k + 2$ применим $(k-1)$–ую операцию усечения вектора $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$ и найдём число α_k и построим вектор $\mathbf{A}_{k+1} = (a_{k+1}^{(k+1)}, \ldots, a_n^{(k+1)}) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n-k}$ ($\mathbf{A}_{k+1}$ — усечение вектора $\mathbf{A}_k$), и граф-звезду G_k^1 с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_k = \begin{cases} n - k - l_{\mathbf{A}_k}(0), & a_k^{(k)} \geqslant n - k - l_{\mathbf{A}_k}(0), \\ a_k^{(k)}, & a_k^{(k)} < n - k - l_{\mathbf{A}_k}(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant a_i^{(k)} - a_i^{(k+1)} \leqslant 1, \ k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ \sum\limits_{i=k+1}^{n} (a_i^{(k+1)} - a_i^{(k)}) = \alpha_k, \\ a_i^{(k+1)} \geqslant a_m^{(k+1)}, \ a_i^{(k)} > a_m^{(k)}, \\ a_i^{(k+1)} \geqslant a_m^{(k+1)}, \ a_i^{(k)} = a_m^{(k)}, \ i < m; \end{cases}$$

в графе-звезде G_k^1 с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, вершины u_q и u_i, где $q < i$, смежны тогда и только тогда, когда $q = k$ и $a_i^{(k)} - a_i^{(k+1)} = 1$, $k + 1 \leqslant i \leqslant n$, причём α_k —

количество рёбер графа G_k^1. При этом легко видеть, что усечённый вектор $\mathbf{A}_{k+1} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n-k}$.

Пусть для вектора $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$ проведена $(n-2)$–ая операция усечения. Этим построены целые неотрицательные числа α_k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, и графы-звезды G_k^1 с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Через r_{G^1} обозначим количество рёбер графа G^1. Пусть $G_{\mathbf{A}}^1$ — произвольный граф с наибольшим количеством рёбер в множестве графов, векторы степеней вершин которых вписаны в вектор $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, $n \geqslant 2$. Количество рёбер графа $G_{\mathbf{A}}^1$ будем также обозначать $r\left(\mathbf{A}\right) = r_{G_{\mathbf{A}}^1}$.

Граф-звезда G_k^1, с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, обладает следующими свойствами: $r_{G_k^1} = \alpha_k$ и подмножество вершин $U(k) \setminus u_1$ образует вполне несвязный подграф этого графа.

Для графа — объединения графов-звёзд, который обозначим

$$G_{\mathbf{A}(1)}^1 = \bigcup_{k=2}^{n-1} G_k^1, \tag{4}$$

легко видеть, что

$$r_{G_{\mathbf{A}(1)}^1} = r(\mathbf{A}(1)) = \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k. \tag{5}$$

Граф $G_{\mathbf{A}(1)}^1$ рассматривается с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$. Вектор степеней вершин графа $G_{\mathbf{A}(1)}^1$ обозначим $\mathbf{C}(\mathbf{A}_2) = \mathbf{C} = (c_2, \ldots, c_n)$, где $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1)$: $G_{\mathbf{A}(1)}^1 = G_{\mathbf{A}(1)}^1(\mathbf{C})$. Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{C} \in \mathbb{Z}_+^{n-1}, \quad c_2 = \alpha_2 \geqslant c_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{i=2}^{n} c_i = 2r(\mathbf{A}(1)).$$

Справедлива

Лемма 2. Для $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$, имеет место:

а) наибольшее количество рёбер в множестве всех графов — реализаций векторов, вписанных в вектор $\mathbf{A}(1)$, равно

$$r(\mathbf{A}_2) = \left(\max_{\mathbf{D}=(d_2,\ldots d_n) \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}_2)} \sum_{i=2}^{n} d_i \right) \Big/ 2,$$

где $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1) = (a_2, \ldots, a_n)$ и $r(\mathbf{A}_2) = r(\mathbf{A}(1))$.

б) количество рёбер графа $G_{\mathbf{A}(1)}^1(\mathbf{C})$ равно $r(\mathbf{A}(1))$.

Доказательство легко получить методом математической индукции по количеству координат вектора $\mathbf{A}$.

Этим алгоритм 1 завершён.

Определение 7. Вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$ называется 2-приводимым, если $a_1 \leqslant r(\mathbf{A}(1))$.

Из леммы 2 следует, что определения 6 и 7 эквивалентны.

Замечание 3. Алгоритм 1 и лемма 2 задают наибольшее количество рёбер графов — реализаций векторов из множества $\mathfrak{M}(\mathbf{A}(1))$. Пусть $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, $n \geqslant 2$, и $\mathbf{A}_0 = \left(a_1^{(0)}, \ldots, a_{n+1}^{(0)}\right)$, где $a_1^{(0)} \geqslant a_1$ и $a_i^{(0)} = a_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Тогда $\mathbf{A}_0(1) = \mathbf{A}$ и из леммы 2 следует

Теорема 3. Наибольшее количество рёбер в множестве всех графов — реализаций векторов, вписанных в вектор $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 2$, равно $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_0(1))$ и

$$r(\mathbf{A}) = \left(\max_{\mathbf{D}=(d_1,\ldots,d_n)} \sum_{i=1}^{n} d_i \right) \Big/ 2.$$

Применяя алгоритм 1 для вектора $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 2$, построим числа α_k и графы-звёзды G_k^1 с множеством вершин $U(n)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, такие, что $r_{G_k^1} = \alpha_k$, и множества вершин $U(k)$ образуют вполне несвязные подграфы графов G_k^1. Тогда для графа

$$G_{\mathbf{A}}^1 = \bigcup_{k=1}^{n-1} G_k^1 \tag{6}$$

имеет место

$$r_{G_{\mathbf{A}}^1} = r\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k.$$

Определение 8. а) Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_+^n$, где $n \geqslant 2$. Произвольный граф $G_{\mathbf{A}}^1$ с наибольшим количеством рёбер в множестве графов, векторы степеней вершин которых вписаны в вектор $\mathbf{A}$, называется максимальным относительно вектора $\mathbf{A}$.

б) Если $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, $n \geqslant 2$, то граф $G_{\mathbf{A}}^1$ из (6), построенный алгоритмом 1, называется старшим максимальным относительно вектора $\mathbf{A}$.

Для вектора $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$, и старшего максимального графа $G_{\mathbf{A}(1)}^1$ относительно вектора $\mathbf{A}(1)$ обозначим

$$p(\mathbf{A}(1)) = \max\left\{k : \alpha_k > 0\right\}. \tag{7}$$

Очевидно, что $p(\mathbf{A}(1)) \leqslant n-1$, и легко видеть, если $p(\mathbf{A}(1)) < n-1$, то при $p(\mathbf{A}(1)) + 1 \leqslant k \leqslant n-1$ имеет место $\alpha_k = 0$ и G_k^1 — вполне несвязный граф и вектор $\mathbf{A}_{k+1}$ имеет не более одной положительной координаты. Из (4), (5) и (7) следует, что

$$r_{G_{\mathbf{A}(1)}^1} = r(\mathbf{A}(1)) = \sum_{k=2}^{p(\mathbf{A}(1))} \alpha_k, \quad G_{\mathbf{A}(1)}^1 = \bigcup_{k=2}^{p(\mathbf{A}(1))} G_k^1.$$

Исследуем вектор степеней вершин $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_2) = (c_2, \ldots, c_n)$ графа $G_{\mathbf{A}(1)}^1 = G_{\mathbf{A}(1)}^1(\mathbf{C})$, где $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(1) = (a_2, \ldots, a_n)$, построенного алгоритмом 1.

Легко видеть, что $p(\mathbf{A}(1)) = n-1$ тогда и только тогда, когда $a_n \geqslant n-2$: если $a_n \geqslant n-2$, то $c_i = n-2$, $2 \leqslant i \leqslant n$, и $G_{\mathbf{A}(1)}^1$ — полный граф с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$. Это простейший случай.

Рассмотрим общий случай. Для каждого графа-звезды G_k^1 имеет место:

а) $r_{G_k^1} = \alpha_k > 0$ при $2 \leqslant k \leqslant p(\mathbf{A}(1))$ и
$r_{G_k^1} = \alpha_k = 0$ при $p(\mathbf{A}(1)) < k \leqslant n-1$;

б) множество вершин $U(k) \setminus u_1$ образует вполне несвязный подграф;

в) α_k вершин из множества $U(n) \setminus U(k)$ смежны вершине u_k.

Поэтому множества вершин $U(n) \setminus U(p(\mathbf{A}(1)))$ графа $G^1_{\mathbf{A}(1)} = G^1_{\mathbf{A}(1)}(\mathbf{C})$ образует вполне несвязный подграф.

Для вычисления координат вектора степеней вершин $\mathbf{C} = (c_2, \ldots, c_n)$ введём обозначение:

$$p_i(\mathbf{A}(1)) = \begin{cases} |\{k : a_i^{(k)} - a_i^{(k+1)} = 1,\ 2 \leqslant k \leqslant i\}|,\ 2 \leqslant i \leqslant p(\mathbf{A}(1)), \\ |\{k : a_i^{(k)} - a_i^{(k-1)} = 1,\ 2 \leqslant k \leqslant n-1\}|,\ p(\mathbf{A}(1)) < i \leqslant n. \end{cases} \tag{8}$$

Легко видеть, что $p_i(\mathbf{A}(1))$ — это количество операций усечения вектора $\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}_2$, при которых происходит уменьшение i–ой координаты (очевидно, что $p_2(\mathbf{A}(1)) = 0$). Тогда из (8) следует, что для координат вектора $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}(1))$ имеет место

$$c_i = \alpha_i + p_i(\mathbf{A}(1)),\ 2 \leqslant i \leqslant n. \tag{9}$$

Введём двухиндексную нумерацию рёбер старшего максимального относительно вектора $\mathbf{A}(1)$ графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ из (4). Это потребуется при построении 2-мерных симплексов вида $\{u_1,\ u_j,\ u_k\}$ при 2-реализуемости вектора $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}^n_+$, где $n \geqslant 3$. Для этого ребро произвольного графа, инцидентного вершинам u_i и u_j, где $i < j$, обозначим (u_i, u_j).

Граф G_k^1, где $2 \leqslant k \leqslant n-2$, содержит α_k рёбер. Если $\alpha_k = 1$, то для единственного ребра графа положим $(u_k, u_i) = (u_k, u_i)_{k,1}$. В случае, когда $\alpha_k \geqslant 2$, для различных рёбер (u_k, u_i) и (u_k, u_j), принадлежащих графу G_k^1, положим $(u_k, u_i) = (u_k, u_i)_{k,l}$ и $(u_k, u_j) = (u_k, u_j)_{k,m}$, где индексы l и m удовлетворяют условиям: $1 \leqslant l,\ m \leqslant \alpha_k$ и $l < m$ при $i < j$.

Алгоритм 2. Построение подграфа $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$ графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ с количеством рёбер $r_{G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}} = a_1$, для 2-приводимого вектора $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ из $\overline{\mathbb{Z}}^n_+$.

Из 2-приводимости (определений 6 и 7) вектора $\mathbf{A}$ следует, что

$$a_1 \leqslant r(\mathbf{A}(1)) = \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k.$$

Поэтому координату a_1 вектора $\mathbf{A}$ можно представить в виде

$$a_1 = \sum_{k<t} \alpha_k + \alpha'_t, \quad 0 \leqslant \alpha'_t < \alpha_t, \tag{10}$$

где $2 \leqslant t \leqslant p(\mathbf{A}(1))$.

Подграф $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$ определим следующим образом: в графе

$$G^1_{\mathbf{A}(1)}(\mathbf{C}) = \bigcup_{k=2}^{n-1} G_k^1 = \bigcup_{k=2}^{p(\mathbf{A}(1))} G_k^1$$

выберем все рёбра из графов G^1_k, где $k < t$, и α'_t первых рёбер из графа G^1_t. Этим построено множество рёбер

$$R(a_1; \mathbf{A}(1)) = \left(\bigcup_{k<t} \left(\bigcup_{l \leqslant \alpha_k} (u_k, u_i)_{k,l} \right) \right) \bigcup_{l \leqslant \alpha'_t} (u_t, u_i)_{t,l}. \tag{11}$$

Множество рёбер (11) задаёт граф $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$ с множеством вершин $U(n) \setminus u_1$: в графе $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$ вершины u_i и u_j образуют ребро тогда и только тогда, когда $(u_i, u_j) \in R(a_1; \mathbf{A}(1))$.

Алгоритм 2 завершён.

В случае реализуемости вектора $\mathbf{A}$ в 2-комплекс будет показано, что существует комплекс с $G^2(\mathbf{A})$, в котором все пары смежных вершин графа $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$, с вершиной u_1 образуют 2-мерные симплексы.

Вектор степеней вершин графа $G^1_{a_1;\mathbf{A}(1)}$ обозначим

$$\mathbf{D}(a_1; \mathbf{A}(1)) = \mathbf{D} = (d_2, \ldots, d_n).$$

Определение 9. Пусть $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n_+$, *где* $n \geqslant 4$.

а) Вектор $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{A})$, *где*

$$\mathbf{B}' = (b_1, \ldots, b_{n-1}) = \mathbf{A}(1) - \mathbf{D}(a_1; \mathbf{A}(1)) = (a_2 - d_2, \ldots, a_n - d_n) \tag{12}$$

называется 2-редукционным для вектора $\mathbf{A}$.

б) Переход от вектора $\mathbf{A}$ *к вектору* $\mathbf{B}'$ *называется редукционным шагом.*

в) Вектор $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}) = \left(a'_1, \ldots, a'_{n-1}\right)$ *называется старшим 2-редукционным вектором для* $\mathbf{A}$, *если* $\mathbf{A}'$ *получен из* $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{A})$ *упорядочиванием его координат по невозрастанию* ($\mathbf{A}' = \widetilde{\mathbf{B}}'$)*; переход от* $\mathbf{B}'$ *к* $\mathbf{A}'$ *также называется редукционным шагом.*

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3. Для вектора $\mathbf{A}$ *из* $\overline{\mathbb{Z}}^n_+$, *где* $n \geqslant 4$, *существует (старший) 2-редукционный вектор тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— 2-приводимый вектор.*

Ниже на понятиях 2-приводимости и 2-редукционности (определения 6 – 8) сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях реализуемости вектора в 2-комплекс. Перед этим приведём пример. Для вектора этого примера первая координата не определена. Будет установлено при каких значениях этой координаты вектор есть 2-приводимый. Будет построен граф с наибольшим количеством рёбер среди всех графов, степени вершин которых вписаны в исходный вектор, у которого удалена первая координата (алгоритм 1). При двух значениях первой координаты вычислены координаты (старших) 2-редукционных векторов. Ниже (в примере 15), при укзанных значениях первой координаты, в одном случае показана нереализуемость в 2-комплекс, а в другом показана 2-реализуемость и построен соответствующий 2-комплекс.

Пример 1. Пусть $\mathbf{A} = (a_1,\ 13,\ 11,\ 10,\ 10,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2) \in \overline{\mathbb{Z}}^9_+$. Построим граф $G^1_{\mathbf{A}(1)}(\mathbf{C})$, удовлетворяющий лемме 2, и определим при каких значениях a_1 вектор $\mathbf{A}$ является 2-приводимым.

В таблице 1 приведены операции усечения вектора $\mathbf{A}(1)$:

а) первая строка — это индексы координат вектора $\mathbf{A}(1)$,

вторая строка — это координаты вектора $\mathbf{A}(1)$,

в остальных строках таблицы вычислены координаты векторов, получаемых операциями усечения вектора $\mathbf{A}(1)$;

б) слева от каждого вектора приведено значение $l_{\mathbf{A}_k}(0)$ — количество нулевых координат вектора $\mathbf{A}_k = (a_k, \ldots, a_9)$ при $i > k$;

в) справо у каждого вектора $\mathbf{A}_k$ приведено значение α_k, причём у предпоследнего вектора указано значение (см. (7)) $p(\mathbf{A}(1))$ — номер последнего не тривиального усечённого вектора;

г) элементы последней строки — это координаты тривиального усечённого вектора $\mathbf{A}_6$ ($\alpha_6 = 0$).

	2	3	4	5	6	7	8	9	№	
$l_{\mathbf{A}_2}(0) = 0$	13	11	10	10	6	4	3	2	$\mathbf{A}_2$	$\alpha_2 = 7$
$l_{\mathbf{A}_3}(0) = 0$	6	10	9	9	5	3	2	1	$\mathbf{A}_3$	$\alpha_3 = 6$
$l_{\mathbf{A}_4}(0) = 1$	-	4	8	8	4	2	1	0	$\mathbf{A}_4$	$\alpha_4 = 4$
$l_{\mathbf{A}_5}(0) = 2$	-	-	4	7	3	1	0	0	$\mathbf{A}_5$	$\alpha_5 = 2$, $p(\mathbf{A}(1)) = 5$
$l_{\mathbf{A}_6}(0) = 3$	-	-	-	5	2	0	0	0	$\mathbf{A}_6$	$\alpha_6 = 0$

Таблица 1.

Формула из (5) показывает, что количество рёбер старшего максимального графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ относительно вектора $\mathbf{A}(1)$ равно $r_{G^1_{\mathbf{A}(1)}} = r(\mathbf{A}(1)) = 19$.

Применяя (8) и (9), получим вектор степеней вершин максимального графа $G^1_{\mathbf{A}(1)} = G^1_{\mathbf{A}(1)}(\mathbf{C})$, который вписан в вектор $\mathbf{A}(1)$:

$$\mathbf{C} = (c_2, \ldots, c_9) = (\overset{2}{7},\ \overset{3}{7},\ \overset{4}{6},\ \overset{5}{5},\ \overset{6}{4},\ \overset{7}{4},\ \overset{8}{3},\ \overset{9}{2}).$$

Над координатами вектора $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}(1))$ расположены индексы вершин, для которых степени вершин графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ равны соответствующим координатам. Сам граф $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ можно построить, применив формулы (2.13) и (2.14). На рис. 8 изображены графы-звёзды G^1_k, $2 \leqslant k \leqslant 5 = p(\mathbf{A}(1))$, и граф $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ — объединение графов G^1_k.

Из определения 7 следует, что исходный вектор из $\overline{\mathbb{Z}}^9_+$ является 2-приводимым тогда и только тогда, когда $13 \leqslant a_1 \leqslant 19$.

Так как сумма координат вектора $\mathbf{A}$ при его 2-реализуемости кратна трём, что следует из теоремы 1, то $a_1 \in \{13,\ 16,\ 19\}$. Рассмотрим два случая: а) $a_1 = 19$ и б) $a_1 = 16$. Будем строить редукционные и старшие редукционные векторы и над координатами этих векторов указывать соответствующие им индексы вершин из множества $U(9) \setminus u_1$ (или координат вектора $\mathbf{A}(1)$). Это потребуется при построении 2-комплексов при условии 2-реализуемости векторов.

а) Пусть $a_1 = 19$ и $\mathbf{A} = (19,\ 13,\ 11,\ 10,\ 10,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2)$. Отметим, что при условии реализуемости вектора $\mathbf{A}$ в 2-комплекс все пары смежных вершин графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ с вершиной u_1 образуют 2-мерные симплексы.

Так как $G^1_{19;\mathbf{A}(1)} = G^1_{\mathbf{A}(1)}$ (см. рис. 8), то из (10) и (11) следует, что $\mathbf{D}(19;\mathbf{A}(1)) = \mathbf{C}(\mathbf{A}(1))$. Применяя (2.25), получим редукционный вектор $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{B}' = (b_1, \ldots, b_8) = \mathbf{A}(1) - \mathbf{D}(19;\mathbf{A}(1)) = (\overset{2}{6},\ \overset{3}{4},\ \overset{4}{4},\ \overset{5}{5},\ \overset{6}{2},\ \overset{7}{0},\ \overset{8}{0},\ \overset{9}{0}).$$

Упорядочив координаты вектора $\mathbf{B}'$ по невозрастанию, получим (определение 9) старший редукционный вектор $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}) = \widetilde{\mathbf{B}'}$:

$$\mathbf{A}' = (a'_1, \ldots, a'_8) = (\overset{2}{6},\ \overset{5}{5},\ \overset{3}{4},\ \overset{4}{4},\ \overset{6}{2},\ \overset{7}{0},\ \overset{8}{0},\ \overset{9}{0}).$$

б) Пусть $a_1 = 16$ и $\mathbf{A} = (16,\ 13,\ 11,\ 10,\ 10,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2)$. Тогда, применяя (10), $16 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha'_3 = 7 + 6 + 3$. Из (2.23) следует, что граф $G^1_{16;\mathbf{A}(1)}$ включает в себя все рёбра из графов-звёзд G^1_2, G^1_3 и три ребра (u_4, u_5), (u_4, u_6), (u_4, u_7) из графа G^1_4. Нетрудно убедиться, что для вектора степеней вершин графа $G^1_{16;\mathbf{A}(1)}$ имеет место

$$\mathbf{D}(16;\mathbf{A}(1)) = (d_2, \ldots, d_9) = (\overset{2}{7},\ \overset{3}{7},\ \overset{4}{5},\ \overset{5}{3},\ \overset{6}{3},\ \overset{7}{3},\ \overset{8}{2},\ \overset{9}{2}).$$

Из (12) следует, что для редукционного вектора $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{A})$ имеет место:

$$\mathbf{B}' = (b_1, \ldots, b_8) = \mathbf{A}(1) - \mathbf{D}(16;\mathbf{A}(1)) = (\overset{2}{6},\ \overset{3}{4},\ \overset{4}{5},\ \overset{5}{7},\ \overset{6}{3},\ \overset{7}{1},\ \overset{8}{1},\ \overset{9}{0}),$$

и упорядочив координаты вектора $\mathbf{B}'$ по невозрастанию, получим старший редукционный вектор $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}) = \widetilde{\mathbf{B}'}$:

$$\mathbf{A}' = (a'_1, \ldots, a'_8) = (\overset{5}{7},\ \overset{2}{6},\ \overset{4}{5},\ \overset{3}{4},\ \overset{6}{3},\ \overset{7}{1},\ \overset{8}{1},\ \overset{9}{0}).$$

5. Редукционный критерий реализуемости вектора в 2-комлпекс

В следующем алгоритме (как будет показано ниже) заключены необходимые и достаточные условия 2-реализуемости вектора. При этом строится и 2-комплекс — реализация вектора в случае его 2-реализуемости.

Алгоритм 3. Построение комплекса $G^2(\mathbf{A})$ — реализации вектора $\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}^n_+$. Можно предположить, что $n \geqslant 4$.

Применяя алгоритм 1, выясним: является вектор $\mathbf{A}$ — 2-приводимым или нет. Если исходный вектор не является 2-приводимым, то алгоритм завершён и построить 2-комплекс — реализацию вектора $\mathbf{A}$ этим алгоритмом невозможно. Если вектор $\mathbf{A}$ — 2-приводим, то применим 1-ый редукционный шаг (определение 9 и лемма 3) и построим старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}' = \left(a'_1, \ldots, a'_{n-1}\right)$.

Если $n \geqslant 5$ и вектор $\mathbf{A}'$ — 2-приводим (в противном случае алгоритм 3 завершён), то применим 2-ой редукционный шаг для вектора $\mathbf{A}$ (редукционный шаг для вектора $\mathbf{A}'$) и построим старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}'' = (\mathbf{A}')' = \left(a''_1, \ldots, a''_{n-2}\right)$.

Пусть для вектора $\mathbf{A}$ применено (если это возможно) $k-1$ редукционных шагов и построен старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k-1)} = \left(a^{(k-1)}_1, \ldots, a^{(k-1)}_{n-k+1}\right)$.

Если $n \geqslant k+3$, где $k \geqslant 1$, и вектор $\mathbf{A}^{(k-1)}$ — 2-приводим, то (лемма 3) применяя k-ый редукционный шаг к вектору $\mathbf{A}$ (или редукционный шаг (определение 9) для вектора $\mathbf{A}^{(k-1)}$), построим старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{A}^{(k-1)})' = \left(a_1^{(k)}, \ldots, a_{n-k}^{(k)}\right)$.

И так далее.

Алгоритм завершает свою работу, если на каком-то редукционном шаге образуется вектор, не являющийся 2-приводимым (будет показано, что в этом случае исходный вектор не реализуем в 2-комплекс).

Пусть построены все старшие 2-редукционные векторы
$\mathbf{A}^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, \ldots, a_{n-k}^{(k)}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n-3$, которые являются 2-приводимыми (достаточно 2-приводимости вектора $\mathbf{A}^{(n-3)} = (a_1^{(n-3)},\ a_2^{(n-3)},\ a_3^{(n-3)})$).

Переобозначим исходный вектор $\mathbf{A}$ из $\overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 4$:
$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{A}^{(0)} = \left(a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right)$.

Параллельно с редукционными преобразованиями векторов при переходе от вектора $\mathbf{A}^{(k-1)}$ к вектору $\mathbf{A}^{(k)}$, где $1 \leqslant k \leqslant n-3$, можно на множестве вершин $U(n)$ строить 2-мерные симплексы.

Напомним: а) для определения 2-приводимости вектора $\mathbf{A}$ был построен (алгоритм 1) старший максимальный относительно вектора $\mathbf{A}(1)$ граф $G^1_{\mathbf{A}(1)}$, имеющий $r(\mathbf{A}(1))$ рёбер (вектор $\mathbf{A}$ — 2-приводим тогда и только тогда, когда $a_1 = a_1^{(0)} \leqslant r(\mathbf{A}(1)))$ и рёбра графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$ были перенумерованы двумя индексами; б) затем, в случае $a_1 \leqslant r(\mathbf{A}(1))$, был построен (алгоритм 2) подграф $G^1_{a_1^{(0)};\mathbf{A}(1)}$ графа $G^1_{\mathbf{A}(1)}$, у которого количество рёбер равно $a_1^{(0)} = a_1$.

Для 2-приводимого вектора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)}$ построим все 2-мерные симплексы $\{u_1,\ u_p,\ u_q\}$ с множеством вершин $U(n)$, для которых $(u_p,\ u_q)$ — ребро графа $G^1_{a_1^{(0)};\mathbf{A}^{(0)}(1)}$, где $\mathbf{A}^{(0)}(1) = \mathbf{A}(1)$.

При переходе от 2-редукционного вектора $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ к старшему 2-редукционному вектору $\mathbf{A}' = \left(a'_1, \ldots, a'_{n-1}\right)$ $(\mathbf{A}' = \widetilde{\mathbf{B}})$ переобозначим множество вершин $U(n)$: $U(n) = \{u_1, \ldots, u_n\} = U^{(0)}(n) = \left\{u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}\right\}$. Затем перенумеруем (применяя верхний индекс) вершины из $U(n) \setminus u_1$. Положим $U^{(1)}(n-1) = \left\{u_1^{(1)}, \ldots, u_{n-1}^{(1)}\right\} = U(n) \setminus u_1$, где вершина $u_i^{(1)}$ соответствует координате a'_i: вершина $u_j^{(1)}$ обозначена через $u_i^{(1)}$, если j-ая координата вектора $\mathbf{B}$ получила индекс i в векторе $\mathbf{A}' = \widetilde{\mathbf{B}}$.

Пусть построен старший 2-редукционный 2-приводимый вектор $\mathbf{A}^{(k)}$. Тогда рассмотрим множество вершин $U^{(k)}(n-k) = \left\{u_1^{(k)}, \ldots, u_{n-k}^{(k)}\right\} = U^{(k-1)}(n-k+1) \setminus u_1^{(k-1)}$, где $n-k \geqslant 3$, построенное по тем же правилам, что и множество $U^{(1)}(n-1)$: вершина $u_j^{(k)}$ обозначена через $u_i^{(k)}$ в случае, когда j-ая координата 2-редукционного вектора, построенного на k-ом редукционном шаге, получила индекс i при переходе к старшему 2-редукционному вектору $\mathbf{A}^{(k)}$.

Если $n-k=3$ и $\mathbf{A}^{(n-3)}$ — 2-приводимый вектор, то из определения 9 следует, что $\mathbf{A}^{(n-3)} = (0,\ 0,\ 0)$ или $\mathbf{A}^{(n-3)} = (1,\ 1,\ 1)$. В этом случае на множестве вершин $U^{(n-3)}(3) = \{u_1^{(n-3)},\ u_2^{(n-3)},\ u_3^{(n-3)}\}$ построим симплекс только в случае $\mathbf{A}^{(n-3)} = (1,\ 1,\ 1)$.

Если $n-k \geqslant 4$ (и можно построить старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k+1)}$), то построим все 2-мерные симплексы $\{u_1^{(k)},\ u_p^{(k)},\ u_q^{(k)}\}$ с множеством вершин $U^{(k)}(n-k)$, для которых $(u_p^{(k)},\ u_q^{(k)})$ — ребро графа $G^1_{a_1^{(k)};\mathbf{A}^{(k)}(1)}$, построенного по формулам (4), (10) и (11) для вектора $\mathbf{A}^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, \ldots, a_{n-k}^{(k)}\right)$.

И так далее.

Процесс (алгоритм) построения 2-мерных симплексов заканчивается в двух случаях.

а) На некотором k-ом редукционном шаге строится вектор $\mathbf{A}^{(k)}$, где $0 \leqslant k \leqslant n-3$, не являющийся 2-приводимым. Это значит, что указанный алгоритм не приводит к 2-реализации вектора $\mathbf{A}$.

б) Вектор $\mathbf{A}^{(n-3)}$ — 2-приводим ($\mathbf{A}^{(n-3)} = (0,\ 0,\ 0)$ или $\mathbf{A}^{(n-3)} = (1,\ 1,\ 1)$). Тогда алгоритм строит 2-комплекс $G^2(\mathbf{A})$ и вектор $\mathbf{A}$ 2-реализуем.

Алгоритм 3 завершён.

Легко видеть, что в алгоритме 3 заключены достаточные условия реализуемости вектора в 2-комплекс.

Лемма 4. Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$. Если вектор $\mathbf{A}$ — 2-приводим и 2-приводим каждый старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k)}$, построенный на k-ом редукционном шаге при $n \geqslant 4$ и $1 \leqslant k \leqslant n-3$, то вектор $\mathbf{A}$ — 2-реализуем.

Оказывается, что условия леммы 4 является и необходимыми для 2-реализуемости вектора.

Лемма 5. Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$, и $\mathbf{A}$ — реализуем в 2-комплекс. Тогда $\mathbf{A}$ — 2-приводим и, в случае $n \geqslant 4$, 2-приводим каждый старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-3$.

Из лемм 4 и 5 следует редукционный критерий 2-реализуемости вектора.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$, где $n \geqslant 3$. Вектор $\mathbf{A}$ реализуем в 2-комплекс тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ — 2-приводим и при $n \geqslant 4$ каждый старший 2-редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k)}$, построенный на k-ом редукционном шаге, $1 \leqslant k \leqslant n-3$, являются 2-приводимыми векторами.

Из теоремы 4 следует:

а) в алгоритме 3 заключён критерий 2-реализуемости вектора;

б) в случае 2-реализуемости вектора алгоритм 3 строит 2-комплекс — реализацию вектора.

Замечание 4. Если на некотором k-ом редукционном шаге получен старший редукционный вектор $\mathbf{A}^{(k)} = (1,\ 1,\ 1,\ 0\ldots,0)$ или вектор $\mathbf{A}^{(k)} = (0,\ 0,\ldots,0)$, то все старшие редукционные вектора $\mathbf{A}^{(l)}$, где $k+1 \leqslant l \leqslant n-3$, есть 2-приводимые. Следовательно, в этом случае алгоритм 3 можно завершить на k-ом шаге и исходный вектор реализуем в 2-комплекс.

Замечание 5. Теорема 4 не требует кратности трём суммы координат вектора. Но перед исследованием вектора на 2-реализуемость имеет смысл проверить это.

Отметим, что в теореме 4 заключены необходимые и достаточные условия существования решения в моделе о составлении подарочных наборов (глава 1), а алгоритм 3 находит это решение при его существовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зыков А. А.* Гиперграфы //УМН. 1972. Вып. 6 (180). С. 89–154.

2. *Зыков А. А.* О некоторых свойствах линейных комплексов // Мат. сб. 1949. Вып. 24 (2). С. 163–188.

3. *Кириченко И. О., Раскин Л. Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения). М.: Радио и связь, 1982.

4. *Mironov A. A., Mokryakov A. V., Sokolov A. A.* About Realization of Integer Non-Negative Numbers Tuple into 2-Dimensional Complexes // Applied and Computational Mathematics. 2007. V. 6. №1. P. 58–68.

5. *Миронов А. А., Мокряков А. В.* Двумерные комплексы полностью описываемые степенями вершин // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Под ред Ю. С. Попкова. 2006. №10(1).

6. *Миронов А. А., Цурков В. И.* Графическое представление многоиндексных иерархических структур. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1991. №3.

7. *Миронов А. А.* О реализуемости наборов чисел в граф и свойства графов с заданным набором степеней вершин. // Тр. Горьковского ГУ. 1981.

8. *Мокряков А. В.* О реализуемости неотрицательного целочисленного вектора в двумерный комплекс // Научные труды международной конференции «XXXII Гагаринские чтения», МАТИ. 2006.

9. *Хакими С. П.* О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа. // Кибернетика сб. нов. сер. 1966. вып. 2.

Мокряков А. В., *«МАТИ»-РГТУ, доцент, Москва; ИПУ РАН, старший научный сотрудник, Москва*, ali.latex@gmail.com

Цурков В. И., *ВЦ РАН, зав. отделом, Москва*, tsur@ccas.ru