НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И НЕЛИНЕЙНОСТЬ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

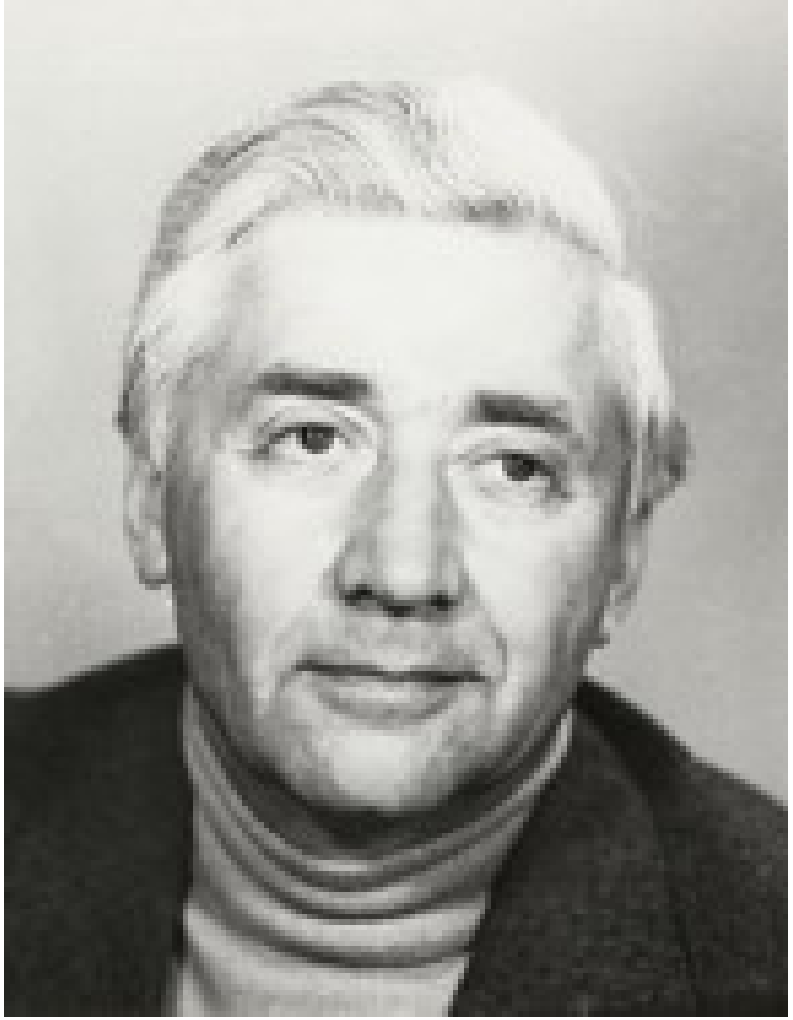
Хлебников Михаил Владимирович

Лаборатория №7 ИПУ РАН

Москва, ИПУ РАН, 29 марта 2018 г.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ
Этап I: 1956–1997

- создана в 1956 г. академиком Я.З. Цыпкиным



- научные достижения Лаборатории в этот период связаны с
  - теорией импульсных, релейных, цифровых автоматических систем
  - теорией робастных и оптимальных алгоритмов адаптации
  - критериями абсолютной устойчивости (круговой критерий Цыпкина)
  - робастной устойчивостью (годограф Цыпкина-Поляка)
- списочный состав Лаборатории достигал 92 человек (1967 г.)
- в разные годы сотрудниками Лаборатории были академики Н.А. Кузнецов, И.М. Макаров, Б.Н. Наумов, Ю.С. Попков, д.ф-м.н. М.А. Красносельский, А.С. Позняк, Н.А. Бобылев, д.т.н. А.М. Петровский и многие другие.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ
Этап II: 1998–2013

- в 1998 г. Лабораторию возглавил д.т.н. Б.Т. Поляк
- в 1998 г. Лаборатории присвоено имя Я.З. Цыпкина
- новые научные направления:
  - теория робастного управления
  - синтез оптимальных регуляторов заданной структуры
  - задачи идентификации и адаптивного управления
- с 2007 года функционирует молодежная научная школа Лаборатории (руководитель — Б.Т. Поляк)
- постоянно действующий семинар по автоматическому управлению
- с 2009 г. усилиями сотрудников Лаборатории проводятся ежегодные Всероссийские традиционные молодежные летние школы "Управление, информация и оптимизация"
- зарубежные коллеги — ученые мирового уровня: S. Boyd (США), A. Nemirovskii (США), А. Юдицкий (Франция), А. Поляков (Франция), R. Tempo (Италия), F. Dabbene (Италия), Ю. Нестеров (Бельгия), А. Позняк (Мексика) и др.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ
Этап III: 2013–...

- с 2013 года Лабораторией руководит д.ф.-м.н. М.В. Хлебников
- в 2016 г. отмечалось 60-летие Лаборатории
- в 2019 году — 100-летие Я.З. Цыпкина
- гранты РНФ и РФФИ, участие в программах ОЭММПУ и Президиума РАН
- четыре сотрудника Лаборатории — члены Ученого Совета ИПУ РАН
- ведется активное международное сотрудничество (Франция, Италия). Планируются российско-мексиканский и российско-итальянский проекты

- основные задачи Лаборатории:
  - продолжать традиции теоретических исследований ИАТа
  - следить за новейшими достижениями теории управления
  - привлекать молодежь

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

- линейные системы
  - робастность
  - подавление внешних возмущений
  - исследование переходных процессов
- оптимизация
  - рандомизированные методы,
  - многокритериальная оптимизация
  - связь со стабилизацией систем управления
  - приложения к энергетике, квадратичные задачи
- нелинейные системы
  - новые функции Ляпунова
  - стабилизация и управление в билинейных системах
- задачи большой размерности: робастный метод главных компонент
- адаптивные регуляторы и их приложения

ИЗБРАННЫЕ МОНОГРАФИИ

• *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983

(2-е издание: *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: УРСС, 2014)

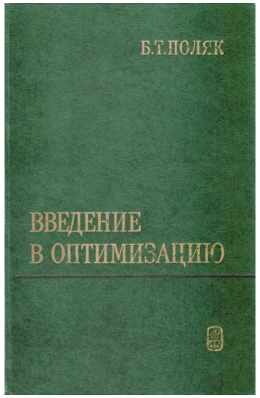
• *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002

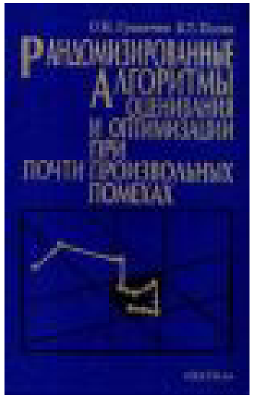
• *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003

• Яков Залманович Цыпкин (1919–1997). М., 2007

• *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2008

• *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системам при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: УРСС, 2014
(удостоена Премии имени Б.Н. Петрова Российской академии наук)





ИЗБРАННЫЕ ПУБЛИКАЦИИ В ВЫСОКОРЕЙТИНГОВЫХ ЖУРНАЛАХ

- *Polyak B.T., Smirnov G.* Large Deviations for Non-Zero Initial Conditions in Linear Systems // Automatica (***Q1***). 2016. V. 74. No. 12. P. 297–307.

- *Friedkin N.E., Proskurnikov A.V., Tempo R., Parsegov S.E.* Network Science on Belief System Dynamics Under Logic Constraints // Science (***Q1***). 2016. V. 354. No. 6310. P. 321–326.

- *Barabanov N., Ortega R., Griñó R., Polyak B.* On Existence and Stability of Equilibria of Linear Time-Invariant Systems with Constant Power Loads // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part 1: Regular Papers (***Q2***). 2016. V. 63. No. 1. P. 114–121.

- *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Optimization and Asymptotic Stability // International Journal of Control (***Q2***). On-line version: November 2016.

- *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Why Does Monte Carlo Fail to Work Properly in High-Dimensional Optimization Problems? // Journal of Optimization Theory and Applications (***Q2***). 2017. V. 173. No. 2. P. 612–627.

- *Parsegov S.E., Proskurnikov A.V., Tempo R., Friedkin N.E.* Novel Multidimensional Models of Opinion Dynamics in Social Networks // IEEE Transactions on Automatic Control (***Q1***). 2017. V. 62. No. 5. P. 2270–2285.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

Линейная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Всегда содержится неопределенность!

Ключевые проблемы, связанные с неопределенностью:

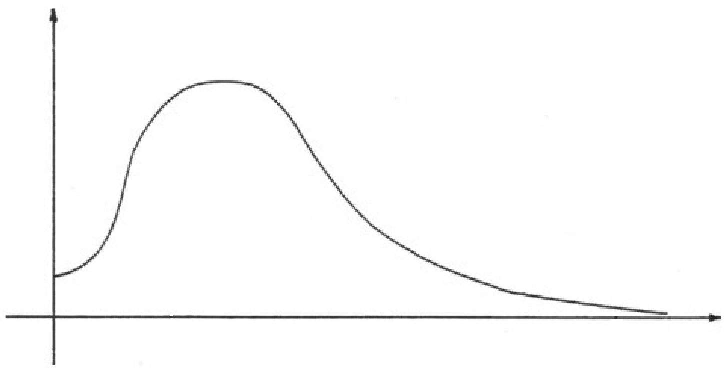
- в описании системы $\Longrightarrow$ проблема робастности

$$\dot{x} = (A + \Delta)x + Bu$$

- во входах системы $\Longrightarrow$ проблема подавления внешних возмущений

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw(t)$$

- в начальных условиях $\Longrightarrow$ эффект всплеска



Эффект всплеска тесно связан с исследованием нелинейных динамических систем

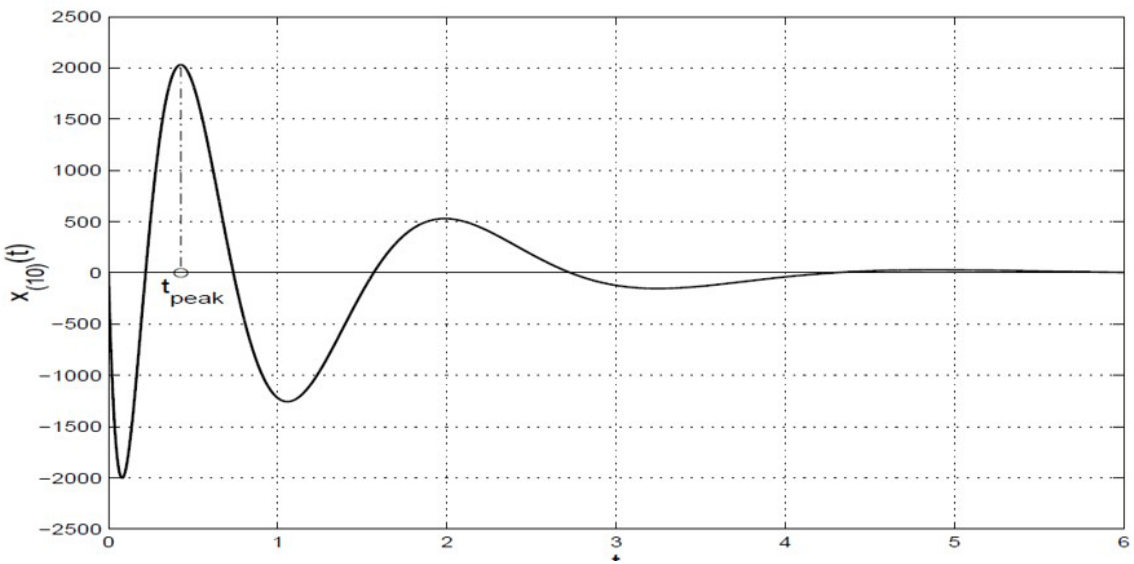
БОЛЬШИЕ ОТКЛОНЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Переходные режимы в линейных системах при ненулевых начальных условиях:

$$\dot{x} = Ax, \quad A \text{ — гурвицева}, \quad x(0) \neq 0$$

Исследования были начаты в 1948 г. в пионерской работе А.А. Фельдбаума.

Прорыв (*Измайлов, 1987*): всплеск неизбежен при сдвиге полюсов системы сильно влево.



Новые результаты:

- более точные оценки величины всплеска
- большие отклонения возникают и при других расположениях полюсов
- верхние оценки отклонений с помощью техники линейных матричных неравенств

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ КОРНЕЙ

Теорема (Большие собственные значения). *Пусть для линейной системы с начальным условием*

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top$$

выполнено требование $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\sigma < 0,\ \ i = 1, \ldots, n.$

Тогда справедлива оценка

$$\left| x\Big(\frac{\log 2}{n\rho}\Big) \right|_\infty \geqslant c_n \sigma^{n-1}$$

где $c_n \approx 0{,}39/n,\ \ \rho = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|.$

Теорема (Малые собственные значения). *Пусть для линейной системы с начальным условием*

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top$$

выполнено требование $\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ \ i = 1, \ldots, n.$

Тогда

$$\left| x\Big(\frac{\gamma_n}{\rho}\Big) \right|_\infty \geqslant c_n \rho^{-(n-1)}$$

где $\rho = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$, *а величины* γ_n *и* c_n *находятся численным образом.*

МИНИМИЗАЦИЯ ВЕЛИЧИНЫ ОТКЛОНЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Линейная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (A, B) \text{ — управляемая пара}, \qquad x(0) \neq 0$$

Цель — минимизация величины отклонений при стабилизации системы с помощью линейной обратной связи по состоянию.

Теорема. *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ — решение задачи*

$$\min \|P\|_2 \quad \textit{при} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \preccurlyeq I$$

Тогда для решений системы, замкнутой регулятором

$$u = \widehat{K}x, \quad \widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$$

справедлива оценка

$$\max_{t>0} \max_{|x(0)|_2=1} |x(t)|_2 \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|_2}$$

- задача полуопределенного программирования (SDP) из класса задач выпуклой оптимизации; легко решается численно

СТАБИЛИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Билинейная система управления

$$\dot{x} = Ax + bu + Dxu$$

$A, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$.

Цель — статическая линейная обратная связь по состоянию

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n$$

которая квадратично стабилизирует билинейную систему внутри некоторого эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\}, \qquad P \succ 0$$

- эллипсоид $\mathcal{E}$ называется эллипсоидом стабилизируемости билинейной системы

- траектории замкнутой билинейной системы, начинаясь в произвольной точке x_0 внутри эллипсоида стабилизируемости, асимптотически стремятся к нулю

- предложен регулярный подход к построению эллипсоида стабилизируемости билинейной системы управления на основе техники линейных матричных неравенств

ЭЛЛИПСОИД СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ

Теорема. *Пусть $\widehat{P}$ и $\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\max \log\det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \varepsilon DPD^\top & y \\ y^\top & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \qquad P \succ 0$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$ и скалярного параметра ε.

Тогда

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1\}$$

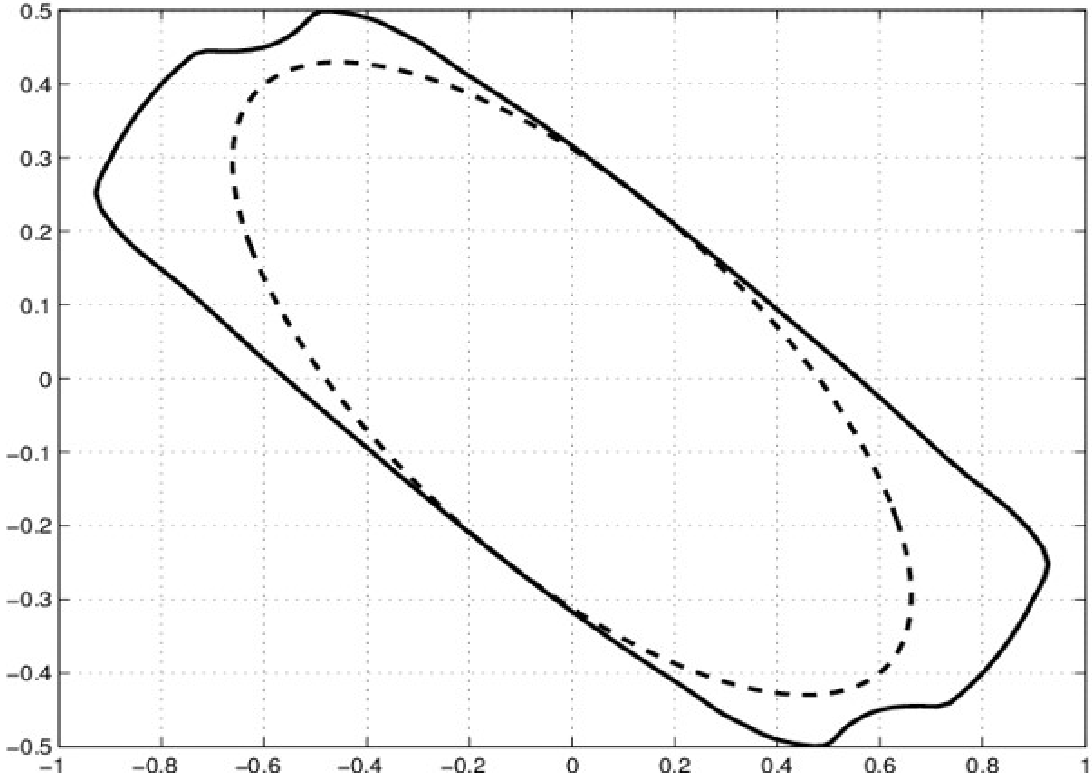
является эллипсоидом стабилизируемости для билинейной системы, замкнутой статической линейной обратной связью по состоянию с регулятором

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y}$$

- результаты распространены:
    - на системы с многомерным управлением
    - на задачу стабилизации с помощью линейного динамического регулятора по выходу
    - на робастные постановки задачи

ОБЛАСТЬ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ

- более сложно устроенное множество, вместе с каждой своей точкой содержащее эллипсоид стабилизируемости
- предложен регулярный подход к построению областей стабилизируемости
- поскольку область стабилизируемости является объединением эллипсоидов стабилизируемости, в общем случае она может оказаться невыпуклой



ОПТИМИЗАЦИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Существуют тесные связи между задачей безусловной оптимизации и задачей анализа асимптотической устойчивости.

Аналогии:

Оптимизация	**Устойчивость**
$\min f(x)$ Градиентный метод: $\dot{x}(t) = -f'\big(x(t)\big)$	$\dot{x}(t) = \varphi\big(x(t)\big)$ Асимптотическая устойчивость: $x(t) \longrightarrow x^*$
Задана функция	Задано уравнение
Построить метод	Построить функцию Ляпунова
Оценить скорость	Доказать устойчивость

- эти связи взаимно полезны (новые версии теорем Ляпунова, новая техника обоснования методов оптимизации)

МЕТОД ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА

Три главных претендента на лучший метод оптимизации: метод Нестерова, метод сопряженных градиентов и метод тяжелого шарика:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bf'(x) = 0$$

- предложен Б.Т. Поляком (1964) из физических аналогий с движением тела в потенциальном поле при наличии трения
- доказана локальная сходимость в окрестности невырожденной точки минимума и глобальная сходимость для квадратичного случая
- большой интерес к дискретному варианту метода (*Attouch, 2000*; *Bolte, 2015* и др.)

Естественный выбор функции Ляпунова — полная энергия:

$$V = f(x) + \frac{1}{2b}\|y\|^2, \qquad y = \dot{x}$$

Трудности:

- условия асимптотической устойчивости нельзя получить из теорем типа Ляпунова
- можно применить теорему Барбашина-Красовского (на Западе — *принцип Ла-Салля*), но она не дает оценок скорости сходимости

НОВЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

$$V = f(x) - f^* + \frac{a}{a^2+2bL}\big(f'(x), y\big) + \frac{L}{a^2+2bL}\|y\|^2$$

Теорема. *Пусть* $f(x) \geqslant f^*$, $f \in C^2$, $\|f''(x)\| \leqslant L$, $a > 0$, $b > 0$.

Тогда для любых $x(0)$, $y(0)$ *имеем*

$$\min_{0\leqslant t\leqslant T} \|f'\big(x(t)\big)\|^2 \leqslant \frac{1}{bT} V\big(x(0), y(0)\big)$$

Если, кроме того, выполнено условие $\|f'(x)\|^2 \geqslant 2l\big(f(x) - f^*\big)$, $l > 0$, *то существует точка минимума* x^*, *и* $x(t) \to x^*$ *с экспоненциальной скоростью.*

Выпуклый случай:

$$V = f(x) - f^* + \alpha\|x - x^* + \beta y\|^2$$

где x^* — точка минимума $f(x)$, а $\alpha > 0$, β — некоторые константы.

Теорема. *Пусть* $f(x)$ *выпукла и* $\alpha = a^2/(2b)$, $\beta = 1/a$. *Тогда*

$$f\big(\bar{x}(T)\big) - f^* \leqslant \frac{1}{aT} V\big(x(0), y(0)\big)$$

- $a(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ зависят от t $\Longrightarrow$ сходимость со скоростью $O(1/t^2)$ (*Boyd, 2014*)

УРАВНЕНИЕ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Задача об асимптотической устойчивости нелинейного осциллятора (синхронный двигатель, автоподстройка частоты, маятник с постоянно действующим моментом) — одна из классических задач теории колебаний (*Трикоми, 1933; Андронов–Витт–Хайкин; Леонов, ...*)

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x - c = 0, \qquad a > 0, \quad 0 < b < c, \quad x(t) \in \mathbb{R}^1$$

- точка равновесия:

$$x = x^* = \arcsin(c/b), \quad y = \dot{x} = 0$$

- полная энергия системы:

$$V = \frac{y^2}{2} + b(\cos x^* - \cos x) - c(x - x^*), \qquad y = \dot{x}$$

- трудности: V не ограничена снизу, не следует асимптотическая устойчивость

Новая функция Ляпунова:

$$V = \frac{y^2}{2} + \frac{ap}{2}(x - x^*)^2 + py(x - x^*) + b(\cos x^* - \cos x) - c(x - x^*)$$

Имеем: $V(x^*, 0) = 0$, $V(x, y) > 0$ в окрестности точки равновесия,

$$\dot{V} = -pb(\sin x - \sin x^*)(x - x^*) - (a - p)y^2 < 0 \quad \text{при} \quad 0 < p < a, \quad |x + x^*| < \pi$$

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

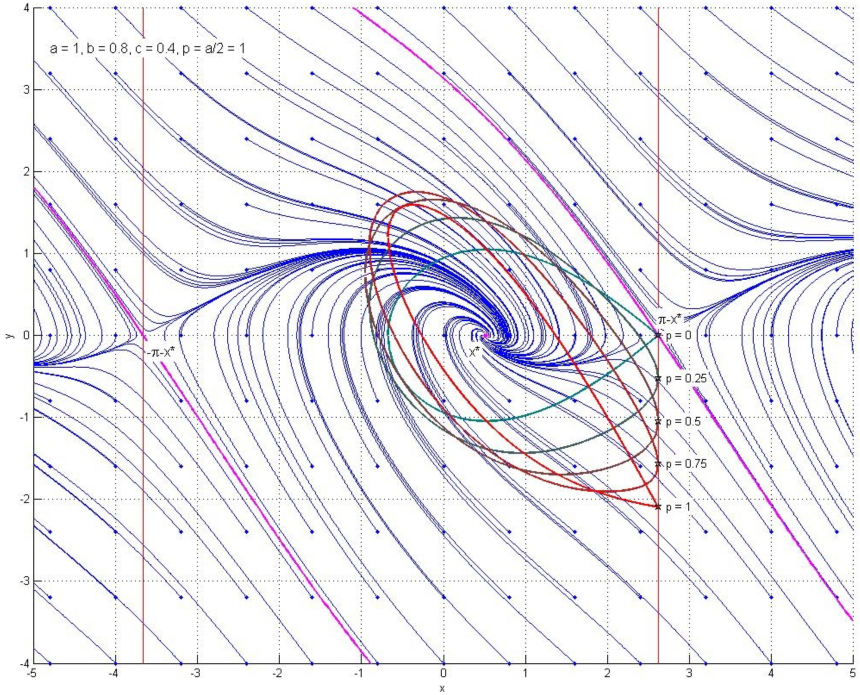
Теорема. *Пусть* $|x(0)+x^*|<\pi,\ \ V\big(x(0),y(0)\big)<h=V\big(\pi-x^*,-p(\pi-2x^*)\big).$

Тогда

$$x(t)\longrightarrow x^*,\qquad y(t)\longrightarrow 0$$

• наилучшее $p=-a/2$

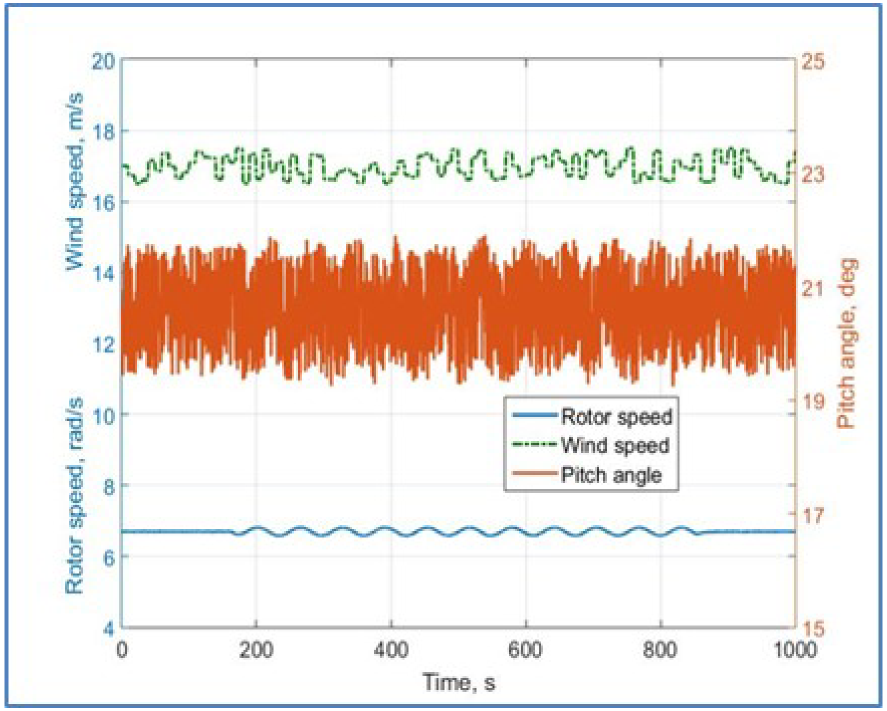
• конструирование специальной функции Ляпунова позволило оценить скорость сходимости и область притяжения точки равновесия:



• эта техника очень удобна и для робастных постановок задач

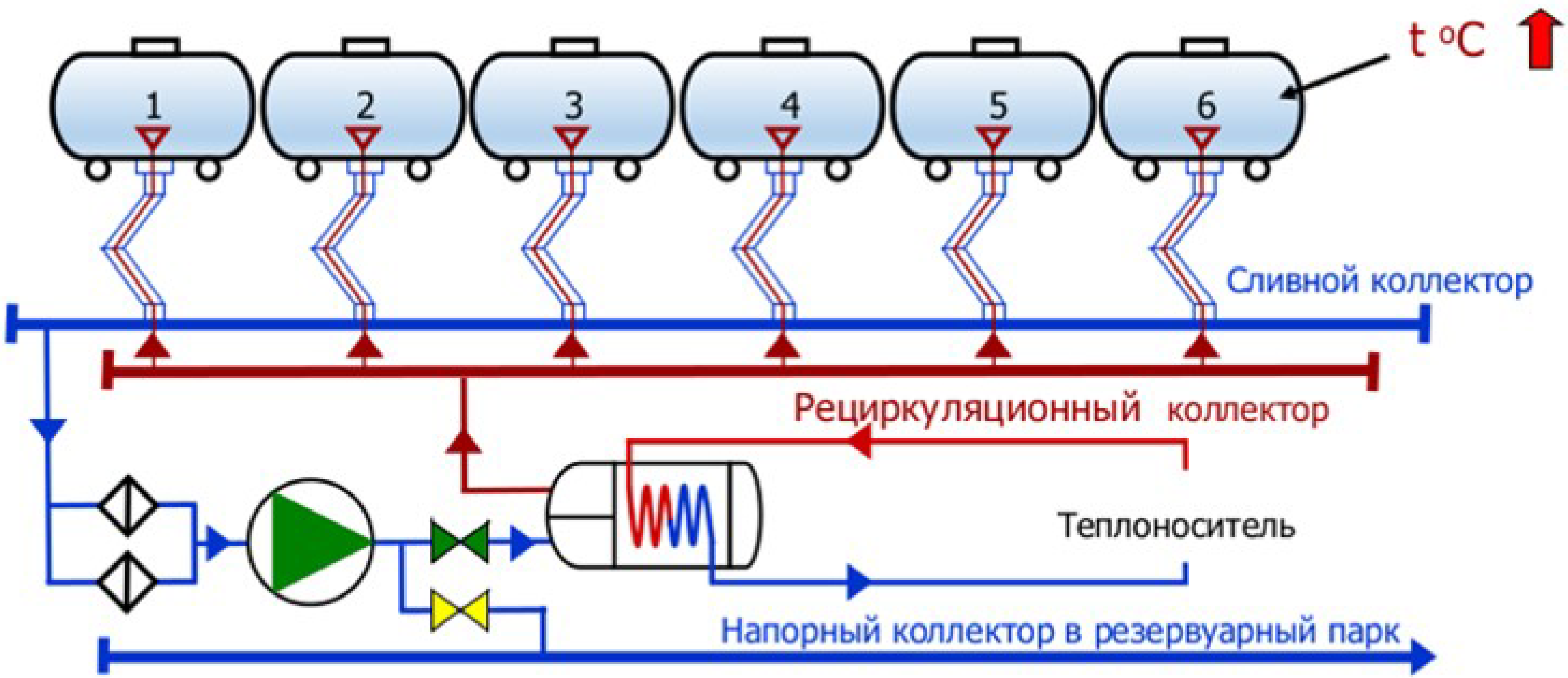
ПРИКЛАДНЫЕ РАЗРАБОТКИ: УПРАВЛЕНИЕ ВЕТРЯНЫМ ГЕНЕРАТОРОМ

- разработан алгоритм управления углом поворота лопастей ветряного генератора
- предложен метод идентификации параметров линеаризованной модели ветряного генератора (механической части с системой управления углом лопастей), которые входят в аналитические выражения для ограничений на коэффициенты ПИ-регулятора, гарантирующие устойчивость и качество процесса управления
- моделирование подтвердило эффективность предложенного подхода



СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ ВЯЗКИХ НЕФТЕПРОДУКТОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЭСТАКАДАХ (ЛАТВИЯ)

- разработана система адаптивного управления температурой разогрева вязкого нефтепродукта при его сливе из системы железнодорожных цистерн
- система прошла испытания на реальном технологическом процессе



✓ Подача состава и подготовка к сливу

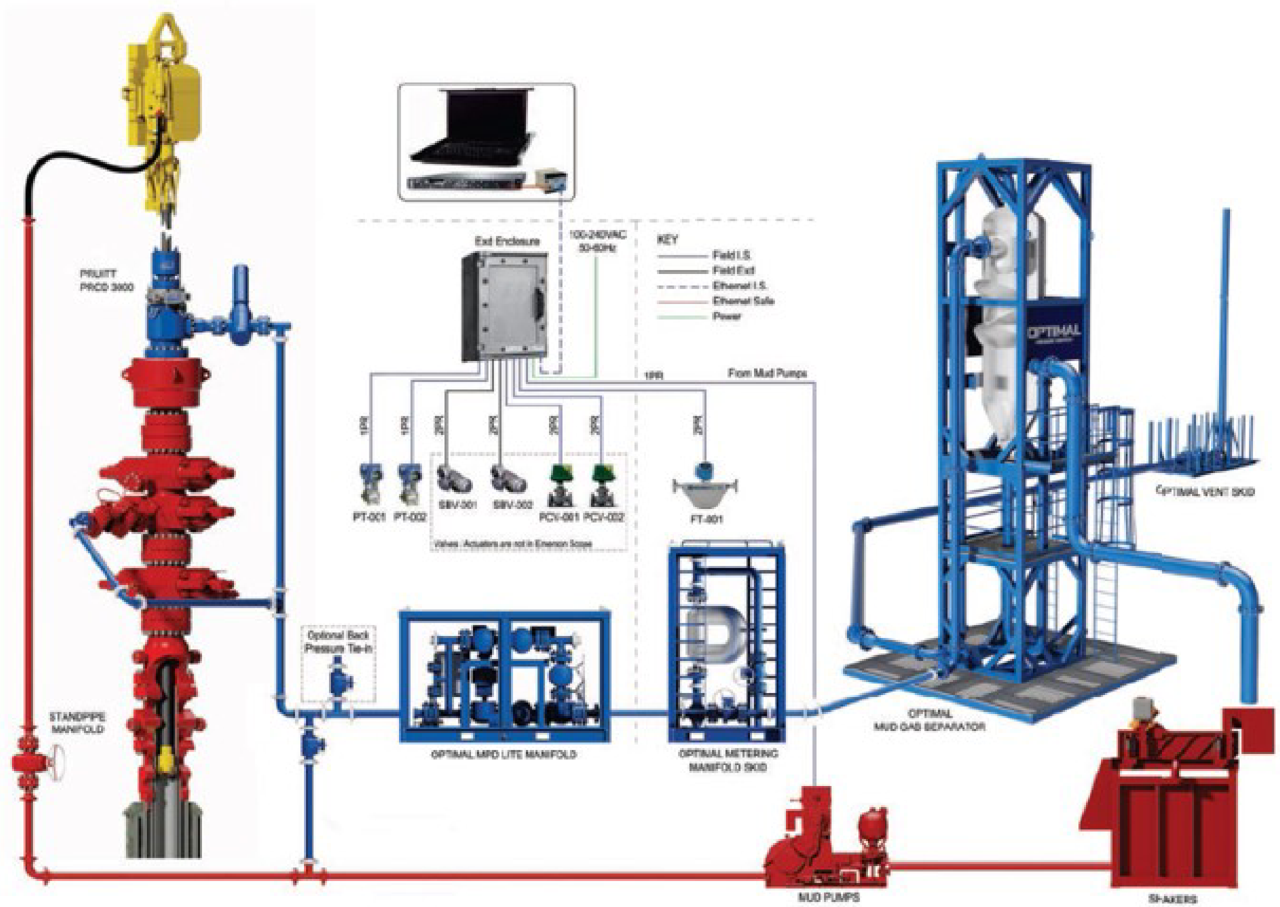
✓ Запуск насоса и регулировка производительности

✓ Подача разогретого нефтепродукта в цистерны через гидромонитор

БУРЕНИЕ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ ДАВЛЕНИЕМ (АНГЛИЯ, США)

Бурение с контролируемым давлением — процесс адаптивного бурения, используемый для точного регулирования профиля затрубного давления на протяжении ствола скважины.

- разработана система адаптивного управления для контроля давления в буровой скважине
- система прошла испытания на реальном оборудовании



ПЛАНЫ НА БУДУЩЕЕ

- разработка новых подходов к анализу и стабилизации нелинейных систем управления, основанная на использовании нестандартных функций Ляпунова

- обобщение результатов анализа асимптотической устойчивости нелинейного осциллятора на многомерный случай (на произвольное число осцилляторов)

- исследование непрерывных и дискретных моделей систем второго порядка с помощью новых функций Ляпунова. Приложение к изучению методов оптимизации — ускоренных градиентных методов безусловной минимизации, градиентных методов при ограничениях типа равенств. Получение верхних и нижних оценок скорости сходимости

- методы стабилизации и управления билинейными системами при наличии внешних ограниченных возмущений

- новые верхние и нижние оценки величины всплеска; исследование эффекта больших уклонений в дискретных линейных системах

- анализ устойчивости и оптимизация переходных процессов в электроэнергетических сетях

- привлечение молодых исследователей

Спасибо за внимание!