

УДК 519.711.74

На правах рукописи

ЖИЛЯКОВА Людмила Юрьевна

РЕСУРСНЫЕ СЕТИ И АНАЛИЗ ИХ ДИНАМИКИ

Специальность: 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.т.н., проф. О.П. Кузнецов

Москва 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ.....	20
1.1. Потокковые модели	21
1.1.1. Классические потокковые модели	21
1.1.2. Потокки в сетях с нестандартной достижимостью.....	26
1.1.3. Задачи, сводящиеся к статическим потокковым моделям	28
1.1.4. Динамические задачи. Потокки во времени (flow over time).....	29
1.2. Случайные блуждания и рассеяние на графах	30
1.2.1. Области применения моделей случайного блуждания.....	30
1.2.2. Конечные цепи Маркова и их классификация	32
1.2.3. Графы переходов конечных цепей Маркова	35
1.2.4. Дискретная модель достижения консенсуса.....	36
1.2.5. Неоднородные цепи Маркова.....	39
1.3. Целочисленные пороговые модели.....	40
1.3.1. Chip-firing game.....	40
1.3.2. Модель «куча песка»	46
1.3.3. Графовая интерпретация «кучи песка» и chip-firing game	48
1.4. Ресурсная сеть	49
1.4.1. Основные определения	49
1.4.2. Классификация ресурсных сетей по топологии	51
1.4.3. Классификация ресурсных сетей по пропускным способностям.....	55
1.4.4. Полные однородные ресурсные сети	58
1.4.5. Ресурсная сеть и динамические графовые модели	63
ГЛАВА 2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В РЕГУЛЯРНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ. СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЕЙ.....	68
2.1. Предельное состояние регулярной сети при $W = 1$	68
2.2. Предельное состояние регулярной сети при малых ресурсах	70
2.3. Регулярные несимметричные сети и их свойства	72
2.4. Пороговое значение T	81

2.5. Коэффициент симметричности сети.....	82
2.6. Аттракторы и их классификация	84
2.6.1. Потенциальные аттракторы.....	84
2.6.2. Классификация аттракторов.....	90
2.6.3. Признаки аттрактивности вершины	90
ГЛАВА 3. ПОТОКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЯХ	97
3.1. Поток ресурса.....	97
3.1.1. Поток при $W \leq T$	97
3.1.2. Поток при $W > T$	98
3.2. Семейство сетей, соответствующих одной стохастической матрице.....	109
3.2.1. Матрицы с большей выходной пропускной способностью вершин- источников.....	112
3.2.2. Матрицы с большей выходной пропускной способностью вершин- приемников.....	112
3.2.3. Матрицы с другой вершиной-приемником.....	114
3.3. Вектор Q^{1*} и пороговое значение T	116
3.4. Свойство аттрактивности и предельное состояние сети	117
3.5. Построение матрицы R с произвольным количеством аттракторов по заданной матрице R'	121
3.6. Оценка числа сетей с неединственным аттрактором.....	124
3.7. Полная сеть с одним приемником и одним источником.....	125
ГЛАВА 4. РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ СЕТИ	130
4.1. Существование предельного состояния и пороговое значение T	130
4.2. Свойства эйлеровых сетей	132
4.3. Предельное состояние сети при $W = 1$ и $W \leq T$	134
4.4. Функционирование сети при $W > T$	137
4.5. Предельные состояния и потоки при больших ресурсах	138
4.5.1. Предельное состояние сети при неизменной зоне $Z^+(t)$	138
4.5.2. Предельное состояние эйлеровой сети. Общий случай	141

4.5.3. Предельные потоки при $W > T$ и задача нахождения вектора \tilde{C}^m (случай отсутствия ресурса в зоне $Z(0)$)	144
4.5.4. Задача нахождения вектора \tilde{C}^m (случай стационарной зоны $Z^+(t)$)	150
4.5.5. Задача нахождения вектора \tilde{C}^m (общий случай).....	153
ГЛАВА 5. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕТИ.....	164
5.1. Элементарные циклы и их свойства.....	165
5.2. Функционирование произвольных циклических сетей при малом ресурсе	180
5.2.1. Функционирование циклической сети при $W = 1$	181
5.2.2. Предельные векторы и циклы d -циклической сети	185
5.2.3. Достижение глобального равновесия при малых ресурсах	189
5.3. Пороговое значение T и функционирование циклических сетей при больших ресурсах	195
5.3.1. Пороговое значение T	195
5.3.2. Критерий аттрактивности и потенциальные аттракторы.....	197
5.3.3. Предельное состояние и предельный поток при больших ресурсах	198
ГЛАВА 6. ПОГЛОЩАЮЩИЕ СЕТИ	203
6.1. Свойства поглощающих ресурсных сетей	203
6.2. Поглощающие сети с единственным предельным состоянием	207
6.3. Поглощающие сети общего вида. Пороговое значение T	210
6.4. Предельные состояния в поглощающих сетях	213
6.4.1. Матрица R^∞ и ее свойства	213
6.4.2. Вектор предельного состояния и его свойства.....	217
6.4.3. Нелинейное изменение промежуточных состояний	220
ГЛАВА 7. УПРАВЛЕНИЕ В РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ.....	225
7.1. Управление в поглощающих сетях.....	225
7.1.1. Прямая задача управления. Распределение фиксированного суммарного ресурса между стоками.....	226

7.1.2. Обратная задача управления. Достижение заданной величины ресурса в одном или нескольких стоках при минимальном суммарном ресурсе	230
7.2. Управление в несимметричных сетях	232
7.2.1. Поглощающая сеть, соответствующая несимметричной, и поправка на регулярность δW	233
7.2.2. Зависимость δW от выходных пропускных способностей аттракторов	244
7.2.3. Нелинейные переходы при функционировании сети и неоднородная цепь Маркова.....	246
7.2.4. Предельное состояние сети при $f_{sum}(t) \geq T$	249
7.2.5. Начальные состояния, не создающие поправку	250
7.2.6. Оценка поправки δW	253
7.2.7. Управление ресурсом в потенциальных аттракторах.....	256
ГЛАВА 8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ	259
8.1. Модель распространения вещества в водной среде, основанная на ресурсной сети	259
8.1.1. Анализ существующих подходов и описание модели.....	259
8.1.2. Топология и правила функционирования ресурсной сети.....	261
8.1.3. Расчет перетоков между районами.....	263
8.1.4. Начальное распределение ресурса по узлам сетки	265
8.1.5. Управляющие параметры модели	266
8.1.6. Программная реализация модели	267
8.1.7. Условия применения и возможное расширение модели	275
8.2. Программа «Ресурсная сеть».....	275
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	280
ЛИТЕРАТУРА	283
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	302

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется новая потоковая модель, названная ресурсной сетью. Ресурсная сеть представляет собой ориентированный граф, вершины которого способны хранить неограниченное количество ресурса, а ребра обладают ограниченной пропускной способностью. На каждом такте дискретного времени происходит перераспределение ресурса между вершинами с выполнением закона сохранения. Вершины отдают ресурс в соответствии с одним из двух правил с пороговым переключением. Если вершина обладает ресурсом, большим, чем суммарная пропускная способность всех ее исходящих ребер, в каждую смежную с вершину она отдает по полной пропускной способности соответствующего ребра; если ресурса недостаточно, он отдается весь, распределяясь пропорционально пропускным способностям исходящих ребер. При наличии петли ресурс, прошедший по ней, возвращается в вершину на следующем такте. Модель параллельна: на каждом такте в перераспределении участвуют все вершины, имеющие ресурс. Если все вершины распределяют ресурс по правилу 2, функционирование сети описывается однородной цепью Маркова, если хотя бы одна вершина функционирует по правилу 1, вектор, описывающий состояния системы, изменяется нелинейно. В зависимости от топологии, пропускных способностей и количества ресурса сети демонстрируют принципиально разное поведение. Произведена классификация ресурсных сетей. Исследованы устойчивые и циклические состояния и потоки для разных классов сетей.

Актуальность темы. Сетевые и графовые модели применяются при описании разнообразных процессов во многих предметных областях, при исследовании системных свойств сложных объектов, в оптимизационных задачах, в задачах сетевого управления, обработки информации и прогнозирования. Эти модели используются при решении классических потоковых задач, комбинаторных задач, при моделировании стохастических и детерминированных процессов с конечным или бесконечным множеством

состояний, при решении проблем централизованного и децентрализованного управления сложными системами, задач распределения нагрузки в электрических, транспортных, компьютерных, коммуникационных и других сетях, в системах обработки распределенной информации. Разнообразие предметных областей влечет за собой разнообразие применяемых моделей и методов. Основные направления развития классических графовых моделей обусловлены их применением в задачах о нахождении потоков, обладающих заданными характеристиками или удовлетворяющих критерию оптимальности по совокупности параметров. В большинстве этих задач ищутся некоторые выделенные пути на графе. Исследованием потоковых моделей занимались многие российские и зарубежные специалисты алгоритмической теории графов, среди которых Г.М. Адельсон-Вельский, Е.А. Диниц, А.В. Карзанов, А.И. Ерзин, И.И. Тахонов, Я.М. Ерусалимский, L.R. Ford, D.R. Fulkerson, J. Edmonds, R.M. Karp, E.W. Dijkstra, T.C. Hu, R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.V. Orlin и другие исследователи. Принципиально иной подход используется в моделях рассеяния на графах: в них рассматриваются все возможные пути между вершинами в связном графе. Такая формулировка задач может быть названа «интегральной по путям» [158]. Алгоритмами, построенными на основе случайных блужданий, решаются задачи распределения нагрузки в электрических и компьютерных сетях, моделируется распространение мнений в социальных сетях, производится анализ значимости пользователей и сайтов Интернет (алгоритм *PageRank* и его модификации), решаются задачи информационного управления. Задачи анализа топологических характеристик графов, сходимости асимптотических методов, спектрального анализа матриц смежности и лапласовских матриц, получения качественных оценок конечных состояний и многие другие задачи решались в работах следующих авторов: П.Ю. Чеботарев, Р.П. Агаев, А.И. Ерзин, И.И. Тахонов, В.Л. Стефанюк, J.G. Kemeni, J.L. Snell, Ph. Blanchard, D. Volchenkov, D.J. Aldous, L. Lovász, P. Winkler и др. Еще один вид моделей – пороговые

целочисленные модели, в частности, игры выстреливания фишек (*chip-firing games*), в которых рассеяние происходит только в тех вершинах, для которых хранящая в них величина превосходит пороговое значение. Основные результаты в исследовании этих моделей получены в работах L. Lovász, P. Winkler, N.L. Biggs, A. Björner, R.J. Anderson, P.W. Shor, J. Spencer, E. Tardos, F. Chung, R. Ellis, E. Prisner. Такими пороговыми моделями, в частности, описываются явления самоорганизующейся критичности «лавина» или «абелева куча». Эти исследования принадлежат, в основном, зарубежным авторам: P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, R. Cori, D. Rossin, D. Dhar, T. Sadhu, S. Chandra, E.R. Speer и др.

Функционирование ресурсных сетей, исследованных в настоящей работе, отличается от всех известных моделей. Вершины в них отдают ресурс в исходящие ребра по двум разным правилам. Выбор правила в каждой вершине обусловлен количеством содержащегося в ней ресурса. Указанные особенности расширяют область применимости сетевых моделей и позволяют имитировать нелинейные процессы; делимость ресурса обеспечивает сходимость там, где в пороговых моделях она не имела места. Моделирование сложных систем с помощью ресурсных сетей позволяет при их анализе выделять объекты предметной области, соответствующие классу аттрактивных вершин, способных аккумулировать большую часть ресурса в сети. Для классов сетей, в которых предельное состояние зависит от начального, ставятся и решаются прямая и обратная задачи управления. Именно этим обусловлена актуальность настоящей диссертационной работы.

Цель работы и задачи исследования. Основная цель работы – исследование функционирования ресурсных сетей, предельных состояний (равновесных или циклических) и потоков в ресурсных сетях при любой топологии, любом количестве ресурса и его начальном распределении по вершинам, их качественных и количественных характеристик; выявление классов сетей, в которых предельные состояния существуют и зависят от начальных, постановка и решение задач управления в таких сетях.

Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

1. Классификация сетей в соответствии с их топологией и свойствами матриц пропускных способностей; классификация вершин по соотношению суммарных входных и выходных пропускных способностей и по их способности аккумулировать ресурс в предельных состояниях. Выявление отличительных характеристик каждого класса сетей.

2. Определение порогового значения ресурса для каждого класса сетей, при котором некоторое множество вершин изменяет правило функционирования. Исследование процессов, происходящих в сетях в окрестности порогового значения ресурса.

3. Исследование функционирования регулярных сетей при малых ресурсах.

4. Описание потоков в регулярных сетях при больших и малых ресурсах. Нахождение матрицы предельных потоков при любом суммарном ресурсе.

5. Исследование переходных процессов и предельных состояний в произвольных регулярных сетях при суммарном ресурсе, превосходящем пороговое значение.

6. Исследование явления аттрактивности и нахождение критерия аттрактивности вершин в регулярных несимметричных сетях.

7. Исследование колебательных процессов, происходящих в циклических сетях; описание условий существования равновесного состояния и потока при малых ресурсах. Нахождение порогового значения и предельных состояний и потоков при больших ресурсах в циклических сетях.

8. Исследование поглощающих сетей с несколькими стоками и несимметричных сетей с несколькими аттракторами.

9. Определение условий, при которых возможна постановка задачи управления в сетях. Формулировка двух задач управления.

10. Создание программы, реализующей функционирование ресурсной сети по заданной матрице пропускных способностей и вектору начальных состояний для проведения численных экспериментов.

Методы исследования. Для описания предельных состояний и потоков использовались методы конечных цепей Маркова, теории матриц, теории графов, спектрального анализа, исследования операций и численные методы. При исследовании предельных состояний и потоков, а также динамики переходных состояний и видов асимптотических процессов, использовалась программа, написанная в среде Visual FoxPro 9.0. Все примеры работы сети (протоколы, гистограммы, графики), представленные в работе, и множество других, были получены с помощью данной программы. Экспорт данных в MS Excel позволил получить на основе табличных данных их графическое представление.

Научная новизна. Ресурсная сеть – новая, ранее не исследованная потоковая модель, предложенная в 2009 году О.П. Кузнецовым. Им был исследован частный случай – полная однородная сеть [83]. В настоящей работе исследованы функционирование, предельные состояния и потоки всех классов ресурсных сетей при любых начальных состояниях и любом суммарном ресурсе. В процессе исследования получены следующие *теоретические результаты*.

1. Проведена классификация ресурсных сетей в соответствии со свойствами их матриц пропускных способностей и структурными свойствами их графов.
2. Описаны явления, связанные со сменой правила функционирования некоторым подмножеством вершин сети при увеличении суммарного ресурса. Для этого введено понятие порогового значения ресурса T , в правой полукрестности которого хотя бы одна вершина изменяет правило функционирования, и процесс распределения ресурса перестает описываться однородной цепью Маркова. Доказана единственность T для каждой эргодической сети, найдена формула, позволяющая выразить T

через предельные вероятности соответствующей цепи Маркова и пропускные способности сети. Выделены классы сетей, для которых значение T можно выразить только через элементы матрицы пропускных способностей. Для поглощающих сетей доказано отсутствие порогового значения.

3. Проведена классификация вершин в несимметричных регулярных и циклических сетях в зависимости от соотношения их входных и выходных пропускных способностей. Введено понятие потенциального аттрактора. Сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершины. Доказано, что при суммарном ресурсе, большем порогового значения, предельное состояние в сети с единственным аттрактором существует и единственно. В сети с несколькими аттракторами распределение ресурса сверх порогового значения между аттракторами зависит от начального состояния. Остальные компоненты вектора предельного состояния определены однозначно и не изменяются при любом увеличении суммарного ресурса. Получены формулы для всех вершин, кроме аттрактивных, выражающие предельное состояние через компоненты вектора предельных вероятностей цепи Маркова и пропускные способности. Для частного случая – сети с одним источником и одним аттрактором – получены формулы предельного состояния, выражающие зависимость предельного количества ресурса только от параметров сети: пропускных способностей ребер и количества вершин.
4. Введено понятие потока в ресурсной сети. Исследованы потоки в регулярных, поглощающих и циклических сетях при больших и малых ресурсах. Доказано существование предельного потока в регулярных сетях. Найдены величины предельных потоков при любом суммарном ресурсе в регулярной сети.
5. Показано, что множество сетей с n вершинами может быть факторизовано по отношению равенства их стохастических матриц. В каждом классе эквивалентности существуют сети с разными пороговыми значениями

ресурса T и с принципиально различными переходными и предельными состояниями при ресурсах, превосходящих T , однако все сети внутри класса имеют одно и то же предельное состояние при малых ресурсах, если оно существует.

6. Показано, что в эйлеровых сетях все вершины являются пассивными потенциальными аттракторами: они могут удержать большой ресурс, но не могут его притянуть. В таких сетях при суммарном ресурсе выше порогового значения предельное состояние в каждой вершине зависит от начального. Доказаны теоремы, позволяющие вычислять предельное состояние при любом начальном состоянии.
7. Найдены формулы для предельного состояния в поглощающих сетях. Доказано, что изменение диагональных элементов матрицы пропускной способности поглощающей сети не влияет на предел степеней соответствующей ей стохастической матрицы. Доказано, что предельное состояние зависит от начального линейно, хотя для промежуточных состояний линейная зависимость от начального состояния может нарушаться.
8. В эргодических циклических сетях с d циклическими классами описаны d предельных векторов, между которыми происходят колебания состояний сети при малых ресурсах. Найден класс начальных состояний, при которых в сетях с малыми ресурсами существует равновесие. Показано, что при больших ресурсах циклические сети теряют осцилляционность, их поведение становится эквивалентным поведению регулярных сетей; найдены все характеристики циклических сетей: пороговое значение ресурса T , критерий аттрактивности вершин, предельный поток и предельное состояние.
9. Предложены формулировки прямой и обратной задач управления в поглощающих сетях с несколькими стоками и несимметричных регулярных сетях с несколькими потенциальными аттракторами.

Обоснованы методы сведения обеих задач к задачам квадратичной оптимизации. Доказана выпуклость целевой функции.

Практические результаты:

1. Разработана модель распространения вещества в водной среде, основанная на неоднородной ресурсной сети, представленной регулярной решеткой. Входными данными модели являются рассчитанные поля течений на заданной акватории, мощность и координаты выброса вещества.
2. Модель реализована в виде программного комплекса, рассчитывающего в дискретном времени распространение вещества по акватории.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Нелинейная потоковая модель, функционирующая по двум правилам с пороговым переключением, поведение и предельное состояние которой при малых ресурсах определяется стохастической матрицей, а при больших ресурсах, дополнительно, матрицей пропускных способностей.
2. Классификация ресурсных сетей в соответствии со свойствами их матриц пропускных способностей и порождаемых ими цепей Маркова.
3. Методы нахождения основных характеристик ресурсных сетей: определение порогового значения ресурса T ; предельного состояния регулярных сетей при малом ресурсе и предельного потока при любой величине ресурса.
4. Формулировка критерия аттрактивности для вершин в несимметричных регулярных сетях; методы определения предельного состояния в сетях с более чем одним аттрактором.
5. Методы вычисления предельного состояния в эйлеровых сетях при больших значениях ресурса как функции от начального состояния.
6. Критерий существования равновесного состояния в эргодических циклических сетях при малых ресурсах. Критерий аттрактивности вершин; формулы для порогового значения, предельного состояния и потока при больших ресурсах в циклических сетях.

7. Формулы нахождения предельного состояния в поглощающих сетях при любых значениях суммарного ресурса.
8. Формулировка прямой и обратной задач управления в несимметричных сетях с несколькими аттракторами и в поглощающих сетях с несколькими стоками и сведение их к задачам квадратичной оптимизации.
9. Модель распространения вещества в водной среде и ее программная реализация.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность и обоснованность теоретических результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечиваются корректным применением математического аппарата конечных цепей Маркова, теории матриц, теории графов, спектрального анализа, исследования операций и строгим математическим обоснованием предложенных методов и алгоритмов.

Теоретическая значимость и практическая ценность полученных результатов. Результатом диссертационного исследования является всестороннее описание новой динамической потоковой модели. Предложенный аппарат позволит моделировать разнообразные процессы – от физического распространения веществ в среде до управления в информационных системах.

На основе несимметричной ресурсной сети автором разработана модель распространения загрязняющих веществ в водной среде «Substance Spreading», позволяющая производить оперативное прогнозирование. Модель внедрена в Азовском научно-исследовательском институте рыбного хозяйства (ФГУП АзНИИРХ), что подтверждается актом о внедрении.

В работах В.Б. Тарасова и В.С. Дюндюкова ресурсные сети расширены до ресурсно-целевых – такие сети применяются при моделировании взаимодействий агентов в многоагентных системах [33 – 35].

Апробация. Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всемирном Конгрессе IFAC (Milano, Italy, 2011), на

Двенадцатой и Тринадцатой национальных конференциях по искусственному интеллекту с международным участием (Тверь, 2010, Белгород 2012), на X международной научно-технической мультikonференции «Актуальные проблемы информационно-компьютерных технологий, мехатроники и робототехники» (Дивноморское, 2009), на X, XI и XII международных конференциях им. Т.А. Таран «Интеллектуальный анализ информации» (Киев, 2010, 2011, 2012), на Научной сессии НИЯУ МИФИ-2010 (Москва, 2010), на Международных научно-технических конференциях Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems OSTIS (Минск, 2011, 2012, 2013), на первой всероссийской конференции с международным участием «Системный анализ и семиотическое моделирование» SASM-2011 (Казань, 2011), на 4-й Всероссийской мультikonференции по проблемам управления МКПУ-2011 (Дивноморское, 2011), на международной научно-практической конференции «Теория активных систем» (Москва, 2011), на Общественном семинаре «Экспертные оценки и анализ данных», на семинарах Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. На программные продукты получены два свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам: свидетельство № 2010617261: Модель неоднородной ресурсной сети «Resource Distribution» и свидетельство № 2010617260: Модель распространения химических веществ и пассивных биологических объектов «Substance Spreading».

Исследования по теме диссертационной работы проводились в соответствии с плановой тематикой работ Учреждения Российской академии наук Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН в рамках темы 3113/10 и Программы фундаментальных исследований № 14 ОЭММПУ РАН, а также при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00771) и при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному контракту от

16.05.2012 г. № 07.524.12.4018 в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы».

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 32 статьях и докладах, среди которых 10 публикаций в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных в действующем перечне ВАК, 2 – в международных изданиях. Доклады доложены на 15 международных, 5 всероссийских научно-практических конференциях. Программные продукты защищены двумя авторскими свидетельствами об официальной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты по теме диссертации были получены автором самостоятельно. В совместных публикациях автора с О.П. Кузнецовым [59, 84–89, 92, 185, 186] О.П. Кузнецову принадлежат понятия, основные определения и результаты, полученные для полных однородных сетей. Все определения и результаты, касающиеся остальных классов сетей, получены автором; автору принадлежат определения и формальные построения моделей, основанных на ресурсных сетях, а также описания их компьютерной реализации. В работах [90, 91], автором написаны разделы, касающиеся ресурсных сетей.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения, списка литературы, включающего 210 наименований, и приложения. Работа изложена на 305 страницах; в тексте содержится 69 рисунков.

Содержание работы. Первая глава посвящена обзору существующих динамических графовых моделей, их классификации по характеру решаемых задач и способам их решения. В ней вводится понятие ресурсной сети, даются основные определения; производятся две классификации ресурсных сетей: по топологии и пропускным способностям. Рассматриваются полные однородные сети. Ресурсные сети помещены в контекст существующих моделей, выделены отличительные особенности ресурсных сетей.

Во второй главе рассмотрены марковские процессы в регулярных сетях и описаны особенности функционирования несимметричных регулярных сетей; вводится понятие порогового значения суммарного ресурса T , при превышении которого процессы в сети перестают описываться однородной цепью Маркова; определяется коэффициент несимметричности сети. Вершины классифицированы по способности сохранять и притягивать ресурс при большом суммарном ресурсе сети W , введено понятие *потенциального аттрактора*, описаны *активные* и *пассивные аттракторы*.

В третьей главе рассмотрены потоки при любом значении ресурса и предельные состояния при $W > T$ в регулярных несимметричных сетях. Доказано существование предельного состояния и потока при больших ресурсах. Найден предельный входной и выходной поток во всех вершинах сети при любом значении W . Показано, что при любом значении $W > T$ суммарный поток равен T . Найдена формула для вычисления порогового значения T . Сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершины. Найдены формулы предельного состояния для всех вершин, кроме аттрактивных. Доказано, что в сети с единственным аттрактором предельное состояние всегда единственно. Показано, что стохастическая матрица является инвариантом для некоторого класса сетей. Сети разбиты на классы эквивалентности в соответствии с их стохастическими матрицами. Предложен и обоснован метод построения сети по заданной стохастической матрице, имеющей наперед заданное число аттракторов. В некоторых частных случаях получены формулы предельного состояния при больших и малых ресурсах и порогового значения T как функции от пропускных способностей сети.

В четвертой главе описываются регулярные эйлеровы сети. В них для каждой вершины сумма пропускных способностей входных ребер равна сумме пропускных способностей выходных ребер. Каждая вершина эйлеровой сети является потенциальным аттрактором. Все аттракторы эйлеровой сети *пассивны*: вершина может удерживать излишек ресурса сверх

своей суммарной выходной пропускной способности, но не может его притянуть из других вершин. Получены формулы предельного состояния при малых ресурсах, зависящие только от пропускных способностей и суммарного ресурса сети. Описаны потоки и предельные состояния при $W > T$. Пороговое значение T в этих сетях и суммарный поток равны суммарной пропускной способности сети, предельные потоки в вершинах совпадают с их выходными пропускными способностями. Получены формулы, выражающие зависимость предельного состояния от начального. Для некоторого класса начальных состояний предельное состояние может быть найдено аналитически, для других начальных состояний предложен алгоритм нахождения промежуточных состояний, при которых предельное состояние вычислимо.

В пятой главе исследуются циклические (нерегулярные) эргодические сети. Показано, что при малых ресурсах в сети происходят незатухающие колебания между d последовательными предельными векторами, где d равно НОД длин всех циклов сети. Эти векторы являются линейно независимыми собственными векторами единственной предельной матрицы, через которую можно выразить остальные $d - 1$ предельных матриц, соответствующими собственному числу $\lambda = 1$ кратности d . Для малых ресурсов найдено условие на начальное состояние, при выполнении которого процесс перераспределения сходится к равновесному состоянию. Показано, что равновесный вектор является единственным положительным собственным вектором стохастической матрицы сети. Найдена формула для нахождения порогового значения T , сформулированы и доказаны теоремы о предельном состоянии и потоке при $W \geq T$, сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершины в произвольной d -циклической эргодической сети.

Глава шестая посвящена исследованию потоков и предельных состояний в поглощающих сетях. В ней описаны свойства поглощающих ресурсных сетей. Одной из основных особенностей таких сетей является отсутствие порогового значения T . Доказано, что предельное состояние в них

существует и линейно зависит от начального состояния при любом ресурсе. Получена формула для нахождения предела степеней стохастической матрицы $R^{t\infty}$. Доказано, что $R^{t\infty}$ не зависит от величины диагональных элементов матрицы R . Как следствие, в поглощающих сетях вектор предельного состояния не зависит от наличия или отсутствия петель.

В седьмой главе рассматриваются сети, в которых можно ставить и решать задачи управления. Для того чтобы в некоторой ресурсной сети можно было поставить задачу управления, необходимо, чтобы предельное состояние зависело от начального. При этом в сети должны быть активные аттракторы – пассивные аттракторы не могут притягивать ресурс. Этим условиям удовлетворяют поглощающие сети с несколькими стоками (при любом значении ресурса) и несимметричные сети с несколькими аттракторами при $W > T$. Управление в поглощающих и несимметричных сетях рассматривается отдельно. Сформулированы прямая и обратная задачи управления. Показано, что в поглощающих сетях обе эти задачи можно свести к задаче квадратичной оптимизации. Доказана выпуклость целевой функции. Показано, что в несимметричной сети закон распределения ресурса между потенциальными аттракторами сходен с законом распределения ресурса в стоках в соответствующей поглощающей сети. Но в несимметричной сети существует поправка на регулярность, которую необходимо учитывать.

Восьмая глава посвящена практическим приложениям ресурсных сетей и их программной реализации. В ней описываются модель распространения вещества в водной среде, основанная на ресурсной сети и программа «ресурсная сеть», с помощью которой были проведены все численные эксперименты настоящей работы.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты исследований.

Приложение содержит акт о внедрении и два свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ.

ГЛАВА 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ

Большое количество задач из разных предметных областей решается с помощью алгоритмической теории графов, причем, это не только задачи, непосредственно связанные с потоками в сетях, сетевым управлением и планированием, но и комбинаторные и вероятностные задачи, имеющие графовую интерпретацию. Классические сетевые задачи – это задачи распределения дорожного трафика, управления транспортными потоками, потоками данных, задачи распределения нагрузки в компьютерных сетях, и ряд других, в которых сетевая модель имеет в качестве прообраза реальную сеть. Сходные инструменты применяются при решении задач, связанных с информационными сетями: с появлением сетей мобильных операторов и социальных сетей и блогов в Интернет выделился класс задач, связанных с моделированием распространения мнений в социальных сетях, установления взаимных влияний абонентов сетей телефонных операторов, управлением связности *ad hoc* сетей и др. Модели достижения консенсуса в многоагентных системах также основываются на графах коммуникаций, характеризующих степень влияния агентов друг на друга при формировании мнений.

В задачах, моделирующих материальные или информационные потоки, ребра графа соответствуют дорогам или иным физическим каналам связи, и основное внимание уделяется нахождению способов наилучшей передачи потока по этим каналам. В других задачах внимание концентрируется на состояниях, соответствующих вершинам графа, а ребра лишь задают переходы между ними (возможно, с некоторой вероятностью). Так, в комбинаторных и вероятностных задачах вершинам графа соответствует множество состояний, а ребрам – допустимые переходы между ними. Часть таких задач адекватно описывается статическими моделями, однако в большинстве случаев строятся динамические модели. Исходя из применяемых методов, эти модели можно разбить на три больших класса:

- 1) классические потоковые модели и их модификации;
- 2) случайные блуждания и рассеяние на графах;
- 3) целочисленные пороговые модели.

Внутри каждого из этих классов встречаются задачи из разных предметных областей, и наоборот, задачи из одной области описываются моделями из разных классов. Типичным примером многообразия описываемых проблем и широкого охвата предметных областей являются потоковые модели.

1.1. Потоковые модели

1.1.1. Классические потоковые модели

К этому классу относятся различные варианты потоковых моделей, начиная от классических задач о нахождении оптимального потока, и заканчивая задачами исследования потоков на графах с нестандартной достижимостью (в таких графах существуют рёбра, обладающие разными свойствами, и вследствие этого не все пути являются допустимыми). Сюда же входит ряд комбинаторных задач, имеющих потоковую интерпретацию. Основные направления развития этого класса задач в большой степени обусловлены их приложениями в городском планировании, транспорте, энергетике, коммуникациях и других областях, в которых важны выборы маршрутов, оптимальных по тому или иному критерию, или некоторой их совокупности. Комбинаторные задачи, решаемые с помощью потоковых моделей, – это задачи о составлении расписаний, о максимальных паросочетаниях (например, трудоустройстве), о паросочетаниях с минимальным расстоянием и другие [6, 95, 97, 115, 116].

Алгоритмы, используемые для решения таких задач, хорошо изучены и описаны. К ним относятся поиск максимального потока (алгоритм Форда – Фалкерсона и его модификации), поиск допустимых и максимальных потоков с минимальной стоимостью, составление динамических потоков, удовлетворяющих тем или иным временным ограничениям и ряд других.

Задача о максимальном потоке

Классическая модель была описана Фордом и Фалкерсоном в [130]. Обзор потоковых алгоритмов был произведен в [6, 145]. Введем основные определения. Пусть $G(V, E)$ – конечный ориентированный граф; V – множество вершин, $|V| = n$; $E \subseteq V \times V$ – множество ребер, $e = (u, v)$; $|E| = m$.

На ребрах определена числовая функция $f(e) = f(u, v)$, $u, v \in V$.

Дивергенцией функции $f(e)$ в вершине v называется разность сумм значений этой функции на входящих и исходящих ребрах.

$$\operatorname{div} f(v) = \sum_{(u,v)} f(u, v) - \sum_{(v,u)} f(v, u).$$

Так как всякое входящее ребро является выходящим, выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{v \in V} \operatorname{div} f(v) = 0.$$

Статические потоки – s - t -поток (1-1-поток)

Классическая постановка Форда – Фалкерсона (s - t -поток) формулируется следующим образом: в сети имеются один источник и один сток. Нужно найти величину максимального потока из источника в сток.

Пусть функция $f(e)$ задает поток в сети. Выполняются следующие условия на сеть и поток.

1. Выделены две вершины: s (источник) и t (сток). Остальные вершины называются внутренними; для них $\operatorname{div} f(v) = 0$.

2. На функцию $f(e)$ наложены ограничения:

$$0 \leq f(e) \leq c(e);$$

$c(e)$ называется пропускной способностью ребра e .

Из п.1 следует, что $\operatorname{div} f(t) = -\operatorname{div} f(s)$.

Величина $M(f) = \operatorname{div} f(t) = -\operatorname{div} f(s)$ называется мощностью потока.

Если $\operatorname{div} f(t) = \operatorname{div} f(s) = 0$, то поток называется циркуляцией.

Для внутренней вершины v_j из условия $\operatorname{div} f(v_j) = 0$ следует, что

$$\sum_{i=1}^n f_{ij} = \sum_{i=1}^n f_{ji}$$

Мощность потока – линейный функционал на множестве потоков:

$$M(\lambda f + \mu g) = \lambda M(f) + \mu M(g).$$

Элементарные потоки можно разделить на два класса – потоки φ_L вдоль простых путей и потоки φ_C вдоль простых циклов. Справедлива следующая теорема.

Теорема о разложении потока. Положительный поток f можно представить в виде суммы элементарных положительных потоков:

$$f = \sum \varphi_L + \sum \varphi_C.$$

Разрезом $A = (X, Y)$ сети G называется разбиение множества вершин на два класса, причем $s \in X, t \in Y$.

$U^+(A)$ – множество ребер, соединяющих вершины из множества X с вершинами множества Y ; $U^-(A)$ – множество ребер, соединяющих вершины из множества Y с вершинами множества X .

$$c(A) = \sum_{e \in U^+} c(e) \text{ – пропускная способность разреза.}$$

$$\operatorname{div} f(A) = \sum_{v \in X} \operatorname{div} f(v) \text{ – дивергенция потока } f \text{ на разрезе } A.$$

Легко показать, что значение дивергенции на разрезе A совпадает с мощностью потока $M(f)$: $\operatorname{div} f(A) = M(f)$.

Тогда,

$$M(f) = \operatorname{div} f(A) = \sum_{e \in U^+} f(e) - \sum_{e \in U^-} f(e) \leq \sum_{e \in U^+} c(e) = c(A),$$

то есть, мощность потока не превосходит пропускной способности любого разреза.

Для сети с источником s и стоком t максимальный поток определяется в соответствии с теоремой Форда – Фалкерсона.

Теорема Форда – Фалкерсона.

1. Если для всех $e \in E$ пропускные способности $c(e)$ – целые числа, то существует целочисленный максимальный поток (поток максимальной мощности).

2. Мощность максимального потока равна пропускной способности минимального разреза: $M(f) = \min_A c(A)$.

Алгоритм Форда – Фалкерсона позволяет находить максимальный поток для любой целочисленной сети.

Пример 1.1. Для сети с пятью вершинами минимальный разрез представлен на рис. 1.1.

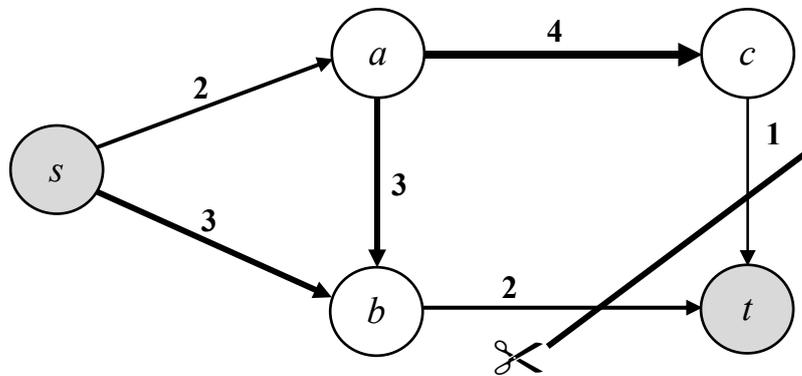


Рис. 1.1. Минимальный разрез

Пропускная способность минимального разреза, а соответственно, и максимальный поток в этой сети равны трем.

В общем случае (при вещественных пропускных способностях ребер) алгоритм Форда-Фалкерсона может не сойтись, причем даже его сходимость не гарантирует получения в пределе максимального потока.

Многополюсные и многопродуктовые потоки

Многополюсный поток. Пусть в сети имеется k источников s_1, \dots, s_k и l стоков t_1, \dots, t_l . Такой поток называется многополюсным. Задача нахождения максимального потока в многополюсной сети (k - l -задача) редуцируется к 1-1-задаче: вводятся фиктивные вершины – единственный источник s и единственный сток t .

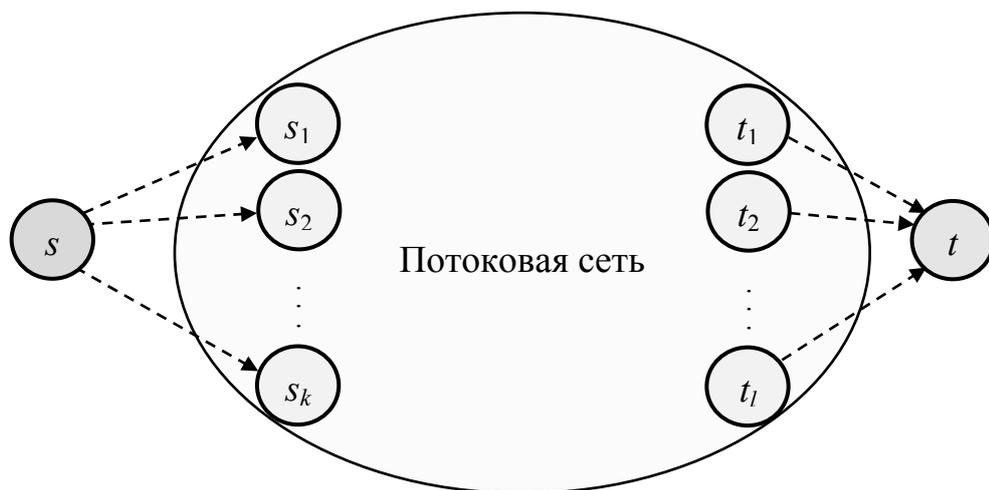


Рис. 1.2. Редукция k - l -задачи к 1-1-задаче

Пропускные способности фиктивных ребер удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c(s, s_i) = \sum_j c(s_i, v_j), \quad c(t_i, t) = \sum_j c(v_j, t_i).$$

Тогда дивергенция в промежуточных вершинах по-прежнему равна нулю. Минимальный разрез 1-1-задачи совпадает с минимальным разрезом k - l -задачи по построению.

Многопродуктовый поток. Пусть имеется множество продуктов $K = \{1, \dots, k\}$, k источников s_1, \dots, s_k , k стоков t_1, \dots, t_k (по одному источнику и стоку для каждого продукта); задано k функций f_i на ребрах, причем f_i задает поток i -го продукта из s_i в t_i .

Формулировка задачи о максимальном многопродуктовом потоке: найти поток максимальной суммарной мощности $\sum_i M_i$.

Поиск сбалансированного потока

Задача поиска сбалансированного потока рассматривается в [36]. Потокотая модель задана сетью с неограниченными пропускными способностями ребер. В сети имеются источники и стоки. Каждая вершина в дискретном времени распределяет пришедший в нее ресурс во все исходящие ребра в заданной пропорции. Начальный поток задается мощностями вершин-источников. Поток, пришедший в стоки, вычитается из суммарного потока. Процесс изменения потока не всегда приходит к равновесному

состоянию. Исследуются условия стабилизации потока, скорость сходимости процесса, ищется вектор сбалансированного потока. Те же авторы в [37] рассматривают модель, более близкую к предложенной в настоящей работе. Описанная в ней сетевая модель, функционирующая в дискретном времени, представлена взвешенным графом; вершинам графа приписаны ресурсы, которые на каждом такте распределяются между инцидентными ребрами. Величина ресурса каждой вершины не изменяется с течением времени. Состояние сети – распределение ресурсов по ребрам. Состояния меняются с течением времени. Для такой модели найдены достаточные условия существования предельных состояний; для некоторых частных случаев приведены формулы их вычисления.

1.1.2. Потоки в сетях с нестандартной достижимостью

В работах Я.М. Ерусалимского и др. [16, 17] было введено понятие графа с *нестандартной достижимостью*. Потоки в сетях с различными видами нестандартных достижимостей были исследованы в работах Я.М. Ерусалимского, Е.О. Басанговой, С.Ю. Логвинова, В.А. Скороходова, А.Г. Петросяна, М.В. Кузьминовой [38-44, 93, 109, 110, 118].

В графах с нестандартной достижимостью вводятся те или иные ограничения на некоторое подмножество ребер, вследствие чего не все пути в графе становятся допустимыми, или появляются пути, придающие потоку некоторые дополнительные характеристики. Вид ограничений определяет тип достижимости в графе. При такой постановке классические графы можно рассматривать как частный (тривиальный) случай графов с нестандартной достижимостью. Для большинства видов достижимости задача нахождения максимального потока оказывается NP-полной [38].

В ориентированных графах со *смешанной достижимостью* [17] множество ребер разбивается на два непустых подмножества: нейтральные и запрещенные ребра, причем, допустимыми в таком графе являются только смешанные пути. В смешанном пути за запрещенным ребром должно

обязательно следовать нейтральное, то есть, по запрещенным ребрам нельзя проходить более одного раза подряд. Проверка наличия пути между двумя вершинами в таком графе (как и в других графах с нестандартной достижимостью), а также поиск кратчайшего пути между вершинами осуществляются с помощью вспомогательного графа, названного разверткой.

Графы с *накоплением магнитности* содержат множество магнитных и немагнитных ребер. Каждому пути в таком графе поставлена в соответствие числовая характеристика λ , называемая величиной накопленной неубывающей намагниченности на этом пути [118].

Графы с *барьерной достижимостью* [109, 110] содержат три типа ребер: нейтральные ребра, увеличивающие ребра и ребра барьерного перехода. В таких графах переход по барьерному ребру возможен только в том случае, если потоком была накоплена энергия не ниже высоты барьерной достижимости h . Энергия накапливается при переходе через увеличивающие ребра (начальная энергия равна нулю).

В графах с *вентильной достижимостью* [43] множество ребер разбивается на m классов с номерами от 0 до $m - 1$, где ребра, принадлежащие нулевому классу, являются нейтральными, а ребра, принадлежащие классу i , называются вентильными уровня i . Вентильным путем в таком графе называется путь, в котором ребро из класса k не может быть пройдено раньше, чем ребро из класса $k - 1$.

Графы с *монотонной достижимостью* также содержат m непересекающихся классов ребер. Путь в таком графе называется монотонным, если номера классов ребер в нем образуют неубывающую последовательность, то есть, если пройдено ребро, принадлежащее классу l , то далее в пути не должны встречаться ребра из классов $1, 2, \dots, l - 1$.

Кроме описанных, рассмотрены частично ориентированные графы [16, 17], графы с биполярной достижимостью [110], с ограниченной магнитной достижимостью [93]. В графах с нестандартными достижимостями рассматриваются процессы случайных блужданий [43, 118],

а также изучаются гомогенные и многопродуктовые потоки [109, 40].

1.1.3. Задачи, сводящиеся к статическим потоковым моделям

Задача о назначениях. Эта задача, являясь комбинаторной, решается с помощью потоковых алгоритмов. Пусть для выполнения l видов t_1, \dots, t_l имеется k работников s_1, \dots, s_k . Каждый работник может выполнять несколько работ, но назначить его можно только на одну. Задача решается редукцией к потоковой 1-1-задаче: ребрам (s_i, t_j) присваиваются пропускные способности $c(s_i, t_j) = 1$. Строится двудольный граф, как показано на рис. 1.3, и, как и в многополюсной задаче, вводятся фиктивные источник и сток.

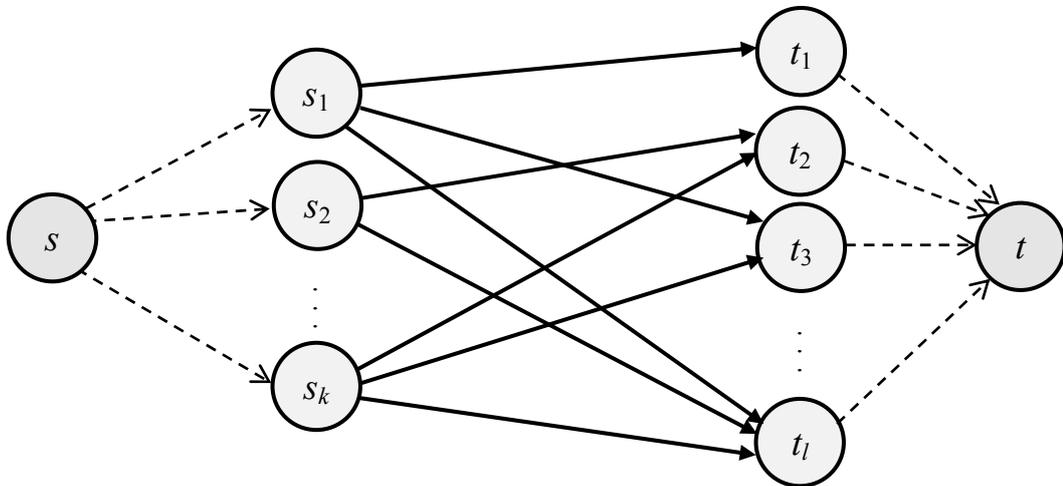


Рис. 1.3. Представление задачи о назначениях

Распределение товаров. Эта задача состоит в распределении поставок товаров с заводов в оптовые базы, предназначенные для временного хранения товаров, а затем в розничные торговые точки. Каналы распределения обладают заданными пропускными способностями и различной стоимостью доставки. Цель состоит в удовлетворении спроса на товар в любой точке розничной торговли, причем, выбор маршрута должен осуществляться с учетом минимизации стоимости доставки.

Обмен данными. В компьютерной сети есть множество серверов, передающих данные по каналам связи с разной скоростью передачи. Серверы обмениваются сообщениями. Задача состоит в нахождении оптимальной скорости передачи данных; если каждому каналу приписана некоторая

стоимость передачи, – нужно произвести поиск варианта передачи с заданной скоростью, при условии минимизации затрат.

Надежность сети. Коммуникационная сеть моделируется как некоторое множество проводов, соединяющих устройства через коммутаторы так, что существует возможность установить линию связи, соединяющую любые два устройства. Требуется найти максимальное число магистральных линий, которые можно отключить без нарушения связи между любой парой коммутаторов.

Отсечение линий снабжения. Ведя военные действия, некоторая страна осуществляет материальное снабжение войск через систему взаимосвязанных дорог. Цель противника состоит в том, чтобы прервать снабжение, нанося по дорогам бомбовые удары. При этом предполагается, что число бомб пропорционально ширине дороги. Задача состоит в нахождении минимального числа бомб, необходимого, чтобы лишить войска снабжения.

1.1.4. Динамические задачи. Потoki во времени (flow over time)

Для каждого ребра e графа $G(V, E)$ кроме пропускной способности $c(e)$, заданы время передачи $\tau(e)$ и ценовой коэффициент $a(e)$ (затраты на единицу потока).

В рамках этой модели решаются следующие задачи.

Максимальные потоки во времени: передать от s к t максимальный поток за время T .

Быстрейшие потоки: передать от s к t заданный объем потока за минимально возможное время.

Потоки с ранним прибытием: построить s - t -поток максимальной мощности, прибывающий в сток раньше момента θ для всех $\theta \in [0, T)$.

Потоки с поздним отправлением: построить s - t -поток максимальной мощности, выходящий из источника позже момента θ для всех $\theta \in [0, T)$.

Потоки с ценами (такие задачи являются NP-трудными):

- найти поток минимальной стоимости в данном интервале времени:
- найти быстрейший поток, не превосходящий заданной стоимости.

Быстрейшие многопродуктовые потоки (также NP-трудные задачи).

Многопродуктовый поток f во времени с горизонтом времени T задается набором функций $f_{e,i}: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $f_{e,i}(\theta)$ определяет долю потока (на единицу времени) продукта i , входящего в ребро e в момент θ . Поток, вошедший в ребро e в момент θ , выходит из e в момент $\theta + \tau(e)$. Времена передачи зафиксированы. Для выполнения горизонта T требуется, чтобы $f_{e,i}(\theta) = 0$ для $\theta \in [T - \tau(e), T)$.

Все эти классы динамических задач можно разделить еще по одному критерию: в одних моделях промежуточные вершины могут только передавать поток (дивергенция в каждый момент времени равна нулю), в других эти вершины способны временно накапливать поток, и затем отдавать.

В модели с хранением потока в промежуточных вершинах к моменту T все вершины должны быть опустошены, и весь поток должен оказаться в стоке.

Все описанные потоковые модели и алгоритмы отличает одна общая особенность. Их целью является выявление ребер, образующих пути, обладающие теми или иными свойствами (максимизирующими поток, минимизирующими затраты и/или время, и т.д.). То есть, ищутся в каком-то смысле «хорошие» пути, а все остальные не учитываются.

1.2. Случайные блуждания и рассеяние на графах

1.2.1. Области применения моделей случайного блуждания

Модели, принадлежащие этому классу, используют принципиально иной подход: в отличие от поиска выделенных путей, в них рассматриваются все возможные пути между вершинами в связном графе. Такая формулировка задач теории графов может быть названа «интегральной по путям» [158].

Случайные блуждания на графах используются в алгоритмах построения выборок, при решении комбинаторных задач о перестановках, при исследовании многопродуктовых потоков и маршрутизации в СБИС [189]. С их помощью моделируются балансирование нагрузки в распределенных сетях, процессы формирования мнений в социальных сетях, активность в сетях мобильных операторов, и ряд других стохастических и детерминированных процессов.

Балансирование нагрузки в распределенных сетях тесно связано с рассматриваемыми процессами на графах. В этой модели каждая вершина (обычно неориентированного) графа соответствует процессору, и каждый процессор i имеет определенное количество рабочей нагрузки w_i . Процессоры хотят передать нагрузку другим процессорам по ребрам, с тем, чтобы их нагрузка приблизительно выровнялась. По духу это близко случайному блужданию на регулярном графе, где «вероятность» передается по ребрам и, в конечном счете, выравнивается [143].

Модели *процессов в сетях мобильных операторов*, позволяющие предсказывать динамику оттока клиентов из данной сети, также моделируются с помощью рассеяния на графе [167]. Вершинами этого графа являются клиенты сети, ребра взвешены – чем сильнее связь между клиентами, определяемая длительностью обоюдных телефонных разговоров, тем больше вес ребра. Величина, накапливаемая в вершине и передающаяся соседям, выражает решимость клиента покинуть данную сеть. При достижении ею определенного значения клиент покидает сеть, что может повлечь за собой лавинообразный уход связанных с ним клиентов. Моделирование таких процессов позволяет прогнозировать сценарии развития мобильной сети и вовремя купировать распространение нежелательных процессов.

При анализе *распространения мнений в социальных сетях* граф представляет собой модель взаимодействия пользователей некоторой социальной сети. Граф ориентирован; вдоль ребер распространяются те или

иные информационные факторы, которые могут формировать коллективное мнение. Все вершины в сети можно оценить по ряду параметров, каждый из которых соответствует некоторому виду значимости: влиятельности, цитируемости, активности. Здесь рассчитываются такие характеристики, как различные виды промежуточности, а также вес PageRank, который, в свою очередь, также является модификацией процесса случайного блуждания на графе [30, 31, 105, 161].

Обобщенные модели рассеяния, в том числе переменного порядка, применяются в области защиты информации, в частности, для обнаружения аномального поведения пользователей компьютерных систем [94, 177, 210].

Дискретные модели достижения консенсуса в многоагентных системах (модель Де Гроота и ее обобщения) описываются, соответственно, однородными и неоднородными цепями Маркова [4, 5].

Случайное блуждание на графе с фиксированной топологией эквивалентно *однородной конечной цепи Маркова*.

1.2.2. Конечные цепи Маркова и их классификация

Пусть S_1, S_2, \dots, S_n – все возможные состояния некоторой системы, функционирующей в дискретном времени t . В каждый момент t система может находиться в одном из состояний. Вероятности перехода из одного состояния в другое задаются стохастической матрицей P , где p_{ij} – вероятность перехода из состояния S_i в S_j . Такая система называется *цепью Маркова*. Если p_{ij} не зависят от t , цепь Маркова называется *однородной*. Любая стохастическая матрица P с вектором начальных вероятностей $\sigma_0 = (\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \dots, \sigma_n^{(0)})$ задаёт однородную цепь Маркова.

Для однородной цепи Маркова с начальным распределением σ_0 и переходной матрицей P выполняется: $\sigma_k = \sigma_0 P^k$, где σ_k – распределение вероятностей в момент k .

Рассмотрим последовательность неотрицательных матриц P, P^2, P^3, \dots , где P – стохастическая матрица. Если существует предел степеней P :

$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} (P)^k$, то величины p_{ij}^∞ называются *предельными переходными вероятностями*.

Матрица P называется *разложимой*, если существует такая перестановочная матрица Π , что

$$\Pi^T P \Pi = \begin{bmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

где P_{11} и P_{22} — квадратные матрицы порядка меньше n [28]. В противном случае матрица P называется *неразложимой*.

По *теореме Перрона – Фробениуса* [28, 96] любая неразложимая матрица $P \geq 0$ всегда имеет положительное собственное число λ , которое является простым корнем характеристического уравнения. Модули всех остальных собственных чисел не превосходят λ . Этому числу соответствует единственный собственный вектор с положительными компонентами.

Если неразложимая матрица $P \geq 0$ имеет h собственных чисел $\lambda_0 = |\lambda_1| = \dots = |\lambda_{h-1}| = \lambda$, то матрица называется *примитивной* при $h = 1$, и *импримитивной* при $h > 1$ [28].

Введем классификацию цепей Маркова, следуя терминологии, введенной в [75]. Состояния цепи Маркова можно разбить на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности содержит все состояния, достижимые друг из друга. При этом между классами имеется отношение частичного порядка, которое указывает возможные направления перехода.

Те классы эквивалентности, из которых нельзя перейти в другие, называются *эргодическими множествами*. Все другие состояния образуют невозвратное множество и называются *невозвратными состояниями*. Если эргодическое множество состоит лишь из одного состояния, то это состояние таково, что, попав в него, уже нельзя из него выйти. Такое состояние называется *поглощающим*.

Цепи без невозвратных множеств

Цепь Маркова называется *эргодической*, если она состоит из одного эргодического множества. Это означает, что существует возможность попасть из каждого состояния во все остальные (не обязательно за один шаг).

Если для стохастической матрицы P эргодической цепи Маркова существует такое конечное значение k , что все степени P^k , начиная с некоторого k , строго положительны, такая цепь называется *регулярной*.¹ Если эргодическая цепь нерегулярна, она называется *циклической*.

Регулярные цепи Маркова

Результаты, полученные для предельных состояний в регулярных цепях Маркова, обобщены в [75]:

Утверждение 1.1. Если P – регулярная стохастическая матрица, то:

- 1) предел $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = P^\infty$ существует;
- 2) для любого вектора вероятностей σ последовательность векторов σP^k сходится к единственному вектору $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ при $k \rightarrow \infty$;
- 3) все компоненты вектора π положительны;
- 4) каждая строка матрицы P^∞ представляет собой один и тот же вектор предельных абсолютных вероятностей, т.е.

$$P^\infty = \mathbf{1}\pi,$$

где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, состоящий из n единиц.

- 5) вектор π единственный вероятностный вектор, для которого $\pi P = \pi$.
- 6) $PP^\infty = P^\infty P = P^\infty$.

Цепи с невозвратными множествами

В таких цепях переход от состояния к состоянию осуществляется в направлении эргодических множеств. Попав в одно из них, процесс уже не может его покинуть. Поэтому исследование таких цепей можно свести

¹ Заметим, что по определению матрица регулярной цепи Маркова неразложима (это определение соответствует терминологии [75]). В [28] регулярная матрица может быть разложимой – необходимым условием регулярности является наличие не более одного эргодического множества. Здесь и далее будем использовать определение регулярности, данное в [75].

отдельно к исследованию эргодических цепей и исследованию цепей, в которых каждое эргодическое множество состоит из одного элемента. Такие цепи называются *поглощающими цепями Маркова*.

1.2.3. Графы переходов конечных цепей Маркова

Взвешенный орграф, соответствующий стохастической матрице P , называется *графом переходов* [112]. Если неориентированный граф связан, то матрица неразложима. Если граф ориентирован, для неразложимости матрицы P необходима сильная связность. Таким образом, смена состояний в однородной цепи Маркова эквивалентна переходу от вершины к вершине в конечном графе в соответствии с вероятностями, заданными весами на рёбрах. Такие процессы задают *случайное блуждание* на графе.

Покажем, что случайное блуждание можно задать на любом графе (не только на графе, соответствующем стохастической матрице). Рассмотрим сильно связный ориентированный граф $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$ (допускаются мультиребра и петли). Обозначим через a_{ij} количество ребер от i до j , и через d_i^+ , d_i^- – полустепени исхода и захода вершины i соответственно. Если граф не ориентирован, $d_i = d_i^+ = d_i^-$ – степень вершины.

Случайное блуждание на орграфе G начинается в некоторой вершине i_0 ; после t шагов оно переходит в вершину i_t , из этой вершины на шаге $t + 1$ блуждание может переместиться к любой вершине j с вероятностью $\frac{a_{i_t j}}{d_{i_t}^+}$.

Множество вершин и вероятности перехода между ними задают цепь Маркова. Вершина i_0 может быть фиксирована, а может сама быть выбрана на основании некоторого начального распределения σ^0 (где σ^0 – вектор-строка). Обозначим через $P = (p_{ij})_{n \times n}$ матрицу переходных вероятностей этой цепи. Тогда:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_i^+}.$$

Правило блуждания выражается уравнением:

$$\sigma^{t+1} = \sigma^t P;$$

$$\sigma^t = \sigma P^t.$$

Т.е. вероятность того, что, начав в вершине i , мы достигнем вершины j через t ходов, будет равна ij -му элементу матрицы P^t .

Распределения вероятностей $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots$ в общем, различны. Распределение σ^0 устойчиво, если $\sigma^1 = \sigma^0$. В этом случае, очевидно, $\sigma^t = \sigma^0$ для всех $t \geq 0$.

Устойчивое распределение будем обозначать через π . Из утверждения 1 следует, что для регулярной цепи Маркова π – левый собственный вектор матрицы переходов P , соответствующий собственному числу 1.

Для неориентированного графа G распределение

$$\pi_i = \frac{d_i}{2m}$$

является устойчивым (m – количество неориентированных ребер). Стационарные состояния для ориентированного графа находятся, как правило, численно.

1.2.4. Дискретная модель достижения консенсуса

Модель Де Гроота достижения консенсуса в многоагентных системах предназначена для согласования субъективных оценок (мнений) группой агентов [168]. В основе этого согласования лежит метод последовательных итераций, в процессе которых происходит сближение мнений.

Пусть $x(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))^T$ – вектор, содержащий начальные мнения каждого члена группы, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор мнений на шаге с номером t . Тогда процесс согласования задается формулой:

$$x(t+1) = Px(t) = P^{t+1}x(0),$$

где P – стохастическая матрица, описывающая влияние агентов друг на

друга; ее элементы p_{ij} характеризуют степень влияния мнения агента с номером j на мнение агента с номером i . Согласие в группе достижимо, если существует такой предельный вектор, все компоненты которого равны. Согласие достижимо и не зависит от начального состояния тогда и только тогда, когда предельная матрица $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = P^\infty$ существует и ее строки одинаковы. Из утверждения 1.1 следует, что для регулярной матрицы влияния консенсус всегда существует.

Стохастическая матрица P задает взвешенный орграф влияний агентов Γ . Ребро (j, i) существует, если агент j влияет на агента i . Сила влияния определяется как вес ребра: $w_{ji} = p_{ij}$. Ребра в Γ ориентированы в направлении влияния.

Лапласовской матрицей L взвешенного орграфа [5] будем называть матрицу:

$$(1.1) \quad L = E - P,$$

где E – единичная матрица.

Матрица максимальных исходящих лесов $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$ взвешенного орграфа Γ определяется следующим образом:

$$\bar{J}_{ij} = \frac{f_{ij}}{f}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где f – суммарный вес всех максимальных исходящих лесов Γ , f_{ij} – суммарный вес максимальных исходящих лесов, в которых вершина i принадлежит дереву, исходящему из j [140] (вес взвешенного орграфа равен произведению весов всех его ребер).

Из следствия матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [24] имеет место равенство:

$$P^\infty = \bar{J}.$$

Введем некоторые дополнительные определения. Пусть A – некоторая квадратная матрица $n \times n$. Образ и ядро матрицы A обозначим соответственно как $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$. Индекс матрицы A $\nu = \text{ind } A$ – такое наименьшее значение

$k \in \{0, 1, \dots\}$, при котором $\text{rank } A^{k+1} = \text{rank } A^k$. Индекс матрицы равен размеру наибольшего блока нулевого собственного значения в ее жордановой форме [140].

Идемпотентная матрица Z (т.е. матрица, для которой $Z^2 = Z$), называется *собственным проектором* матрицы A , соответствующим собственному значению 0, если $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{R}(A^\nu)$ [203, 140]. Для Z выполняется: $ZA^\nu = A^\nu Z = 0$. Идемпотентная матрица однозначно определяется ядром и образом [153, 5], поэтому собственный проектор единствен.

Собственный проектор лапласовской матрицы L обозначим через \tilde{J} .

В [162] доказано, что собственным проектором матрицы L является матрица максимальных исходящих лесов \bar{J} : $\tilde{J} = \bar{J}$. Непосредственно отсюда вытекает, что $\bar{J}^2 = \bar{J}$ и $L\bar{J} = \bar{J}L = 0$.

С другой стороны, поскольку $L = E - P$, имеем

$$P^\infty L = LP^\infty = 0, \text{ причем } \mathcal{R}(P^\infty) = \mathcal{N}(L) \text{ и } \mathcal{N}(P^\infty) = \mathcal{R}(L) [1].$$

То есть, P^∞ – собственный проектор матрицы L , $\text{rank } P^\infty = \nu$, $\text{rank } L = n - \nu$, $\text{ind } L = 1$ [196, 203, 3].

Таким образом, предел последовательности степеней стохастической матрицы, если он существует, совпадает с собственным проектором лапласовской матрицы и с матрицей максимальных исходящих лесов графа влияний:

$$P^\infty = \tilde{J} = \bar{J}.$$

Если $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ не существует, то есть, матрица P периодическая, для нее

существует предел по Чезаро (обозначим его так же: P^∞)

$$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P^i.$$

В случае аperiodической матрицы предел по Чезаро совпадает с пределом последовательности $\{P^k\}$. Для предела по Чезаро верны все приведенные выше равенства.

Тогда предельный вектор итерационного процесса Де Гроота вычисляется по формуле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \tilde{J}x(0).$$

Для вычисления собственного проектора существуют конечные алгоритмы. В [3] доказана теорема о том, что собственный проектор любой квадратной матрицы A может быть вычислен с помощью аннулирующего многочлена для матрицы A^k , где $k \geq \nu$. Так как для лапласовской матрицы $\nu = \text{ind } L = 1$, предельная матрица P^∞ может быть найдена с помощью любого аннулирующего многочлена L .

Кроме того, для вычисления матрицы \tilde{J} можно использовать формулы, приведенные в пп. 8–10 предложения 1 [140], и методы, описанные в [3].

1.2.5. Неоднородные цепи Маркова

В однородных цепях Маркова вероятности перехода из состояния в состояние постоянны и не зависят от времени. Если стохастическая матрица изменяется на каждом шаге: $P = P(t)$, цепь Маркова называется неоднородной. Пусть неоднородная цепь описывается последовательностью матриц $P(1), P(2), \dots$. Введем следующее обозначение:

$$H_k = \prod_{i=1}^k P(i), k = 1, 2, \dots$$

Если хотя бы одна из стохастических матриц $P(t) = \mathbf{1}\sigma^T$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$, σ – некоторый вероятностный вектор, т.е. матрица $P(t)$ состоит из одинаковых строк, всё произведение H_k также будет представлять собой матрицу с одинаковыми строками. При этом для любой стохастической матрицы R' выполняется $R'P(t) = P(t)$. Если R' умножить на $P(t)$ слева, также получится матрица с одинаковыми строками [4]. В этом случае неоднородная цепь принципиально не отличается от однородной регулярной цепи. Применительно к модели Де Гроота это означает, что в ней достигнут консенсус.

Цепь с матрицами $H_k = (h_{ij}^{(k)})$ называется *слабо эргодической*, если для всех i, l, j выполняется $(h_{ij}^{(k)} - h_{lj}^{(k)}) \rightarrow 0$. При этом предел произведений матриц H_k может не существовать.

Цепь с матрицами H_k называется *сильно эргодической*, если для некоторого вероятностного вектора π имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = \mathbf{1}\pi^T.$$

Обзор результатов для неоднородных цепей Маркова, а также основанных на них моделей согласования мнений приведен в [4].

1.3. Целочисленные пороговые модели

1.3.1. Chip-firing game

Игра выстреливания фишек (*Chip-firing game*) описана в ряде работ Р. Андерсона, Дж. Спенсера, Л. Ловаса, А. Бьёрнера, П. Шора, Е. Тардос, С. Винограда, Н. Биггса и др. [148, 154–157, 164, 165, 188, 189, 200]. Игра состоит в следующем. Пусть G – ориентированный граф, который может иметь петли и кратные ребра. В начальном состоянии в некотором множестве вершин графа содержатся стопки фишек. «Ход» состоит в выборе вершины, число фишек в которой не меньше числа ее исходящих ребер, после чего эта вершина выстреливает, т.е. передает по одной фишке по каждому исходящему ребру всем своим соседям.

Игра продолжается до тех пор, пока остается хотя бы одна вершина, способная выстрелить. Ключевое свойство таких игр состоит в том, что при любой заданной начальной позиции все последовательности выстрелов ведут себя одинаково: либо все они будут длиться бесконечно, либо закончатся за одинаковое количество шагов с одной и той же конечной позицией.

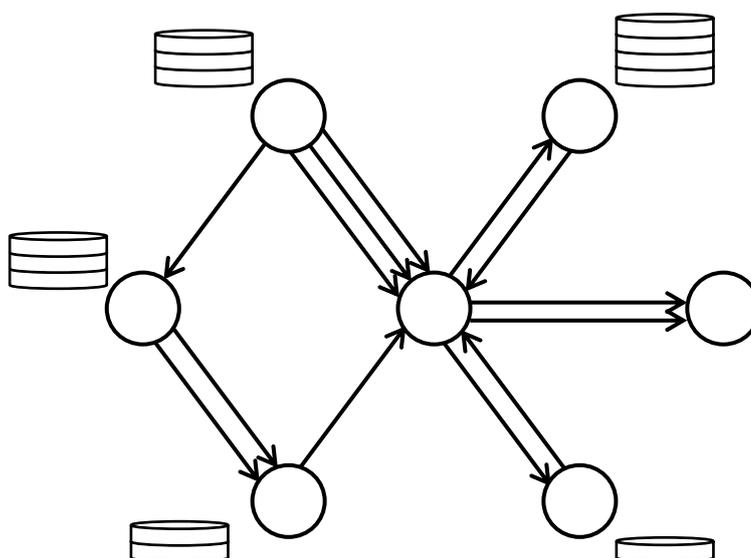


Рис. 1.4. Распределение фишек в chip-firing game

Сначала была исследована игра на неориентированном графе [156], где начальная позиция задавалась некоторым набором вершин, в которые помещались стопки фишек. В дальнейшем исследовалась модель chip-firing на ориентированных графах. Для всех этих случаев было доказано, что игра в зависимости от количества фишек и топологии графа является конечной или бесконечной, независимо от выбора последовательности ходов. Более того, для фиксированного начального состояния при любом выборе допустимых ходов конечная игра всегда заканчивается в одной и той же позиции за одно и то же количество шагов, а бесконечная игра заикликивается с одним и тем же циклом. В ориентированных графах окончание игры может зависеть также от наличия стоковых вершин.

В дальнейшем разными авторами были предложены некоторые модификации игры. Так, в частности, в [200] рассматривается параллельная игра выстреливаний, где все вершины, способные выстрелить, стреляют одновременно. В [154, 155] и [188] рассматривается модификация, названная долларовой игрой. В этой игре существует выделенная вершина, обладающая бесконечной ёмкостью и аккумулирующая фишки. Она стреляет тогда и только тогда, когда ни одна вершина больше не может произвести выстрел. Свойства такой игры выражаются в терминах полинома Татта [22]. В [155] отмечено, что долларовая игра может быть использована как модель

экономики, в которой правительство (выделенная вершина) вливает деньги в систему, только если вся экономика останавливается. Изучение различных модификаций долларовой игры ведет ко многим задачам, связанным с критическими конфигурациями системы [154, 155]. Долларовая игра является частным случаем задачи Дирихле, в которой множество вершин графа делится на внутренние и граничные, причем граничные вершины обладают бесконечной емкостью. В долларовой игре граничная вершина единственна. В [164] рассматривается общий случай этой модели – chip-firing game на графе, в котором существует множество граничных вершин, и попавшие в них фишки выбывают из игры. Эта работа инспирирована исследованиями в сетях коммуникаций, под фишками в ней понимаются пакеты или задания, а граничные вершины соответствуют процессорам с неограниченной вычислительной мощностью.

Ближе всего к модели, исследованной в настоящей работе, находится параллельная игра выстреливаний, однако акцент в исследовании этой модели был смещен в сторону изучения поведения отдельных вершин в зависимости от конфигурации сети и исследованию устойчивых циклических конфигураций фишек в зависимости от их общего количества. Интересующие нас результаты (свойства собственных чисел и векторов лапласовской и стохастической матриц, конечность или бесконечность игры, формулы, выражающие предельные состояния и др.), в основном, были получены для последовательных игр на ориентированных графах.

Модели, эквивалентные Chip-firing games, были представлены независимо, по крайней мере, дважды. Кроме описанной выше модели, предложенной Дж. Спенсером [206], и обобщенной коллективом авторов в [148], в середине 70-х годов А. Энгелем была предложена модель, названная «вероятностным абаком» [175, 176]. Энгель рассматривал вероятностный абак как метод нахождения вероятностей случайных событий. Целевое событие соответствует некоторой стоковой вершине графа. Вероятность события рассчитывается как вероятность оказаться в заданном стоке из

некоторой начальной вершины. Такой граф описывает поглощающую цепь Маркова. Вероятность находится с помощью распределения фишек на графе (Энгель называет их шашками). Вершины в вероятностном абаке соответствуют состояниям системы, и таким образом, комбинаторными методами производится расчет вероятностей попадания из заданного начального состояния в указанное конечное. Кроме этого, вероятностный абак позволяет определять ожидаемое число шагов для попадания из заданной начальной позиции в указанный сток. Средствами этой модели можно производить поиск предельных вероятностей не только в поглощающих, но и в эргодических цепях Маркова.

Граф в этой модели рассматривается как аналог шашечной доски. Шашки хранятся в вершинах и перемещаются в соответствии с переходными вероятностями, соответствующими ребрам. Например, на рис. 1.5 вершина 1 может сделать ход, если она обладает не менее чем шестью шашками. В общем случае, если вершина 1 имеет количество шашек $6q + r$ ($0 \leq r < 6$), в свой ход она отдает q , $3q$ и $2q$ в вершины 2, 3 и 4 соответственно, а r шашек остаются в вершине.

Вершина называется критически загруженной, если для хода ей не хватает одной шашки (рис. 1.5). Поглощающая сеть критически загружена, если критически загружена каждая нестоковая вершина (рис. 1.5).

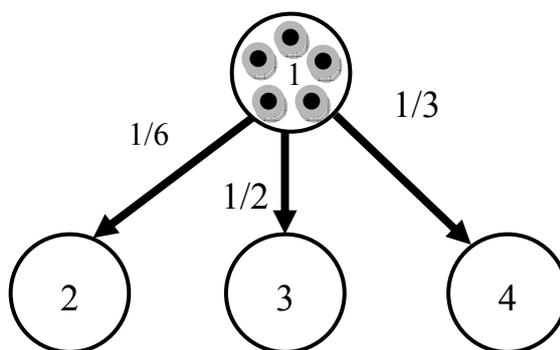


Рис. 1.5. Критически загруженная сеть

Близость вероятностного абак к играм выстреливаний очевидна. Кроме того, в [157] проводятся аналогии игры выстреливания с сетями Петри и нейронными сетями, однако сходства и различия этих аппаратов с chip-

firing не исследовались.

При исследовании игры в выстреливания возникает ряд естественных вопросов. Будет ли процесс конечным или бесконечным? Если конечным, как долго он будет длиться? Если бесконечным, как скоро он зациклится? Сколько фишек необходимо для бесконечной игры? Какая последовательность выстреливаний нужна для перехода из заданной начальной позиции в некоторую другую позицию?

В случае неориентированных графов на эти вопросы получены ответы. Существуют алгоритмы полиномиальной сложности для определения, задает ли начальная позиция конечную или бесконечную игру, а также для определения, достижима ли одна позиция из другой. Пусть n – количество вершин, m – количество ребер в графе. Если процесс конечен, он заканчивается не позднее, чем за $O(n^4)$ шагов. Кратчайший период в периодической игре равен n ; минимальное число фишек для бесконечной игры равно m . Ориентированные графы более трудны для изучения, и алгоритмическая сложность нахождения некоторых параметров для них пока не установлена.

Пусть игра выстреливаний происходит на ориентированном графе $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$ (мультиребра и петли возможны, как и в случае со случайными блужданиями). Пусть по-прежнему d_i^+ и d_i^- – выходная и входная степени вершины i соответственно, a_{ij} – количество ребер, ведущих от вершины i к вершине j . Тогда $d_i^+ = \sum_j a_{ij}$, $d_i^- = \sum_j a_{ji}$, a_{ii} – количество петель в вершине i .

Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^V$ введем обозначения:

$$|v| = \sum_{k \in V} |v_k|, \quad \|v\| = \sum_{k \in V} d_k^+ |v_k|.$$

Орграф называется *эйлеровым*, если $d_i^+ = d_i^-$ [157]. В chip-firing games на неориентированных графах, поскольку выстрелы происходят последовательно, каждое ребро может быть попеременно и входным и

выходным. Таким образом, неориентированные графы в этой модели по умолчанию считаются эйлеровыми. Ряд результатов, полученных для неориентированных графов, переносится в неизменном виде на случай эйлеровых графов. Произвольные ориентированные графы исследованы гораздо меньше.

Полезным инструментом при изучении chip-firing games является «уравнение сохранения фишек». Пусть s – начальная позиция, а t – заключительная позиция некоторой конечной игры, и пусть x_i – это количество выстреливаний вершины i . Тогда

$$\sum_j a_{ji} x_j - d_i^+ x_i = t_i - s_i.$$

Непосредственно из этого уравнения следует, что

$$(1.2) \quad xL = t - s,$$

где $L \in \mathbb{R}^{V \times V}$ – лапласовская матрица графа $G(V)$, определяемая следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq j \\ -d_i^+ + a_{ii}, & \text{если } i = j \end{cases}$$

Это определение мы используем, следуя [189]. Сравнив формулу (1.2) с формулой (1.1), которая также задает лапласовскую матрицу, можно увидеть два отличия: матрицы из формул (1.1) и (1.2) имеют противоположные знаки, и первая из них вычисляется по стохастической матрице, а вторая – непосредственно по матрице переходов графа. Связь между ними видна из формулы (1.3). В настоящем разделе под лапласовской матрицей L будем понимать матрицу, заданную в (1.2).

Пусть v – левый собственный вектор L , соответствующий собственному числу $\lambda_0 = 0$: $vL = 0$. Из теоремы Перрона-Фробениуса следует, что $v > 0$. Если G – эйлеров орграф (в частности, неориентированный граф), то $v = \mathbf{1}$.

Матрица Лапласа связана с матрицей переходных вероятностей случайного блуждания следующим соотношением:

$$(1.3) \quad P = D^{-1} L + E,$$

где D – диагональная матрица с полустепенями исхода соответствующих вершин на главной диагонали. Отсюда следует, что вектор предельных вероятностей связан с вектором v формулой:

$$(1.4) \quad \pi_i = \frac{d_i^+ v_i}{\|v\|}.$$

Для периодических chip-firing games основной характеристикой является длина периода. Из (1.2) следует, что при прохождении полного периода $s = t$ и

$$(1.5) \quad xL = 0.$$

Следовательно, $x = lv$ для некоторого целого положительного l . В [189] показано, что всегда можно достичь равенства $x = v$. В этой же работе доказано, что минимальная длина периода любой игры на графе G равна $|v|$, количество фишек, перемещенных в течение минимального периода, равно $\|v\|$.

Из формулы (1.4) вытекает, что распределение вероятностей регулярной цепи Маркова q является стационарным тогда и только тогда, когда вектор x , определенный как $x_i = \frac{q_i}{d_i^+}$, является ядром матрицы Лапласа, т.е. удовлетворяет уравнению (1.5). А это, в свою очередь, означает, что длину периода и количество фишек в игре выстреливаний можно однозначно определить по вектору предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова.

1.3.2. Модель «куча песка»

Датский физик Пер Бак ввел понятие *самоорганизованной критичности*, которое используется при описании сложных систем. Самоорганизованная критичность (СК) характеризуется относительно долгими периодами равновесия, прерываемыми катастрофами (лавинами) различных масштабов, которые, в свою очередь, ведут к новому равновесию.

При этом малые воздействия на систему могут порождать лавины разных размеров (размеры лавин подчиняются степенному закону). Такая модель описывает разнообразные процессы в сложных системах, которые самоорганизуются к критическому состоянию. Упрощенная модель СК, предложенная П. Баком, С. Таном и К. Уизенфельдом представляет собой «кучу песка», которую можно описать клеточным автоматом [149 – 151].

Модель представляет собой двумерную решетку, описывающую поверхность, на которую сыплется песок. Модель является открытой: песчинки поступают извне, и при «сходе лавины» могут покидать решетку через граничные ячейки. Каждой ячейке (клетке) (x, y) приписывается целое неотрицательное число $Z(x, y)$. Вводится т.н. «правило обрушения». Если количество песчинок в ячейке (x, y) больше критического значения $Z = 3$, в каждую соседнюю клетку добавляется по песчинке, а количество песчинок в (x, y) уменьшается на 4. Правила функционирования кучи таковы. В решетке случайным образом выбирается ячейка и в нее добавляется одна песчинка. Процесс повторяется до тех пор, пока одна из ячеек не достигнет критического состояния. Тогда она обрушивается, что, в свою очередь, может вызвать обрушение соседних ячеек. Если обрушивается граничная ячейка, песчинки покидают решетку. После стабилизации в решетку снова начинает сыпаться песок. Такие правила функционирования вызывают лавины любых масштабов – от самых маленьких до самых больших. Их распределение подчиняется степенному закону.

Алгебраические свойства модели были исследованы в ряде работ, в частности в [201, 193, 172]. Дипак Дхар обобщил модель «кучи песка». Он доказал, что она представляет собой аддитивную абелеву группу [169]. Если обрушившаяся ячейка активизирует несколько соседних ячеек, они обрушиваются поочередно. Обрушивание ячеек коммутативно: любая лавина заканчивается одним и тем же состоянием независимо от выбора последовательности, в которой происходили опрокидывания.

1.3.3. Графовая интерпретация «кучи песка» и chip-firing game

Модель «куча песка» представляет собой регулярную решетку, однако ее можно обобщить на любой граф. Естественную интерпретацию этой модели представляет chip-firing game. В [189] рассмотрена модель схода лавины, представленная некоторым оргграфом с кратными ребрами. Каждая вершина представляет собой место, в котором аккумулируется снег. Специальная вершина s отвечает за «внешний мир». Это вершина, из которой идет снег. Она связана со всеми остальными вершинами сети. Когда количество снега в одной из вершин превышает порог, она «обрушивается», посылая по единице снега каждому исходящему соседу, которые, в свою очередь, могут обрушиться, и т.д., начиная лавину. Из граничных вершин снег покидает модель. Если ориентированный граф, моделирующий поверхность схода лавины, сильно связан, за конечное число шагов все вершины избавятся от лишнего снега, и ни один из них больше не сможет выстрелить, и сход лавины прекращается.

Вершина s соединяется с каждой вершиной i посредством a_i ребер. Снегопад соответствует выстреливанию вершины s . Предполагается, что снега в s «достаточно» для того, чтобы он стрелял всегда. Таким образом, поддерживается динамика модели.

Последовательность лавина-снегопад-лавина-снегопад-... задает бесконечную игру в выстреливания на графе с дополнительным ограничением: вершина s стреляет только тогда, когда ни одна другая вершина не стреляет. Когда лавина начинает сходить, очередность выстреливания вершин может быть различной, однако количества выстреливаний каждой вершины и конечное распределение снега определены однозначно.

Конечная позиция после схода лавины называется *устойчивой*.

Параметры модели: топология графа, количество кратных ребер от вершины i к вершине j характеризуют силу влияния вершины i на вершину j ; количество кратных петель характеризует степень устойчивости вершины к

внешним воздействиям; вершину s можно рассматривать как управляющую вершину.

1.4. Ресурсная сеть

Ресурсная сеть, исследуемая в настоящей работе, – динамическая потоковая модель, которая имеет существенные отличия от каждого описанного класса моделей и не сводится ни к одному из них.

1.4.1. Основные определения

Ресурсной сетью называется оргграф $G = (V, E)$ с вершинами $v_i \in V$, ребрам которого $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ приписаны неотрицательные числа r_{ij} , постоянные во времени и называемые *пропускными способностями*.

Ресурсами $q_i(t)$ называются неотрицательные числа, приписанные вершинам v_i и изменяющиеся в дискретном времени t . Вершины v_i могут хранить неограниченное количество ресурса.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент t считаем вектор $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, содержащий значения ресурсов в каждой вершине.

Состояние $Q(t)$ называется *устойчивым*, если $Q(t) = Q(t + 1) = \dots$

Состояние $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется *асимптотически достижимым* из состояния $Q(0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$.

Состояние сети называется *предельным*, если оно либо устойчиво и достижимо из $Q(0)$ за конечное время, либо асимптотически достижимо из $Q(0)$.

$R = (r_{ij})_{n \times n}$ – матрица пропускной способности сети.

$r_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}$ – суммарная пропускная способность сети.

$$r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji} \quad \text{и} \quad r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \quad - \quad \text{входная и выходная пропускные}$$

способности вершины соответственно. Пропускная способность петли, если она существует, входит в обе суммы.

Суммарный ресурс всех вершин обозначим через W .

В сети выполняется *закон сохранения*: при функционировании ресурс не поступает извне и не расходуется: $\forall t \sum_{i=1}^n q_i(t) = W$.

Распределение ресурса в сети происходит по одному из двух правил, выбор которых зависит от количества ресурса в вершинах.

Правила распределения ресурса. В момент t вершина v_i отдает в ребро, соединяющее ее с вершиной v_k :

r_{ik} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{ik}}{r_i^{out}} q_i(t)$ ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

По правилу 1 вершина отдаст за такт работы всего $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ ресурса.

По правилу 2 вершина отдает весь свой ресурс. Если ресурс в вершине равен выходной пропускной способности вершины: $q_i(t) = r_i^{out}$, то применение правил 1 и 2 даст одинаковые результаты.

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ik} в момент t , приходит в вершину v_k в момент $t + 1$.

Модель параллельна. На каждом такте все вершины, имеющие ресурс, отдают его во все исходящие ребра по правилу 1 или 2, в зависимости от его количества; вершины, смежные с ними, получают ресурс по входящим ребрам.

Множество вершин с ресурсом $q_i(t)$, не превосходящим r_i^{out} , назовем зоной $Z(t)$. Вершины из $Z(t)$ функционируют по правилу 2. $Z^+(t)$ – множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной

способности, они функционируют по правилу 1. Для предельного состояния Q^* обозначим эти зоны Z^* и Z^{+*} .

Поток ресурса. Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t , приходит в вершину v_j в момент $t + 1$. Будем считать, что между моментами t и $t + 1$ ресурс находится в ребре e_{ij} . Этот ресурс назовем *поток* $f_{ij}(t)$. Общий поток $F(t)$ описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n \times n}$.

Величиной потока называется сумма: $f_{sum}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(t)$.

По любому ребру не может течь ресурс, больший его пропускной способности. Из этого следует, что $\forall t f_{ij}(t) \leq r_{ij}$ и $f_{sum}(t) \leq r_{sum}$.

$\sum_{j=1}^n f_{ij}(t) = f_i^{out}(t)$ – сумма элементов i -й строки матрицы $F(t)$ равна

ресурсу, выходящему из вершины v_i в момент t . $f_i^{out}(t) \leq r_i^{out}$

$\sum_{i=1}^n f_{ij}(t) = f_j^{in}(t+1)$ – сумма элементов j -го столбца равна ресурсу,

входящему в вершину v_j на следующем такте; $f_j^{in}(t+1) \leq r_j^{in}$. Кроме того, положим по определению $f_j^{in}(0) = 0$.

1.4.2. Классификация ресурсных сетей по топологии

В зависимости от топологии графов ресурсные сети делятся на классы, демонстрирующие принципиально различное поведение. В разделе 1.2.3 было показано, что случайное блуждание можно задать на любом графе, и, следовательно, каждый граф порождает некоторую однородную цепь Маркова.

Каждому классу цепей Маркова, описанному в разделе 1.2.2, соответствуют графы с различной топологией.

Эргодическая цепь Маркова порождает сильно связный граф переходов. Если эргодическая цепь является регулярной, то НОД длин всех циклов d сильно связного графа равен единице. Если $d > 1$, граф описывает циклическую цепь Маркова. Поглощающей цепи соответствует граф со стоковыми вершинами (вершинами, не имеющими исходящих ребер). Количество стоков равно количеству поглощающих состояний цепи.

В первых работах, посвященных ресурсным сетям, были описаны связные двусторонние сети с непустым множеством петель [84, 85] (рис. 1.6). (Двусторонними называются сети, в которых каждые две смежных вершины связаны парой противоположно ориентированных ребер). Такие сети заведомо сильно связны, кроме того, поскольку графы содержат петли, НОД всех циклов в них равен 1. Это означает, что графы двусторонних сетей с петлями состоят из одного циклического класса, а следовательно, соответствуют регулярным цепям Маркова. Ресурсные сети, графы которых задают регулярные цепи Маркова, будем называть *регулярными ресурсными сетями*.

Все результаты, полученные для двусторонних сетей с петлями, могут быть полностью перенесены на любую регулярную ресурсную сеть.

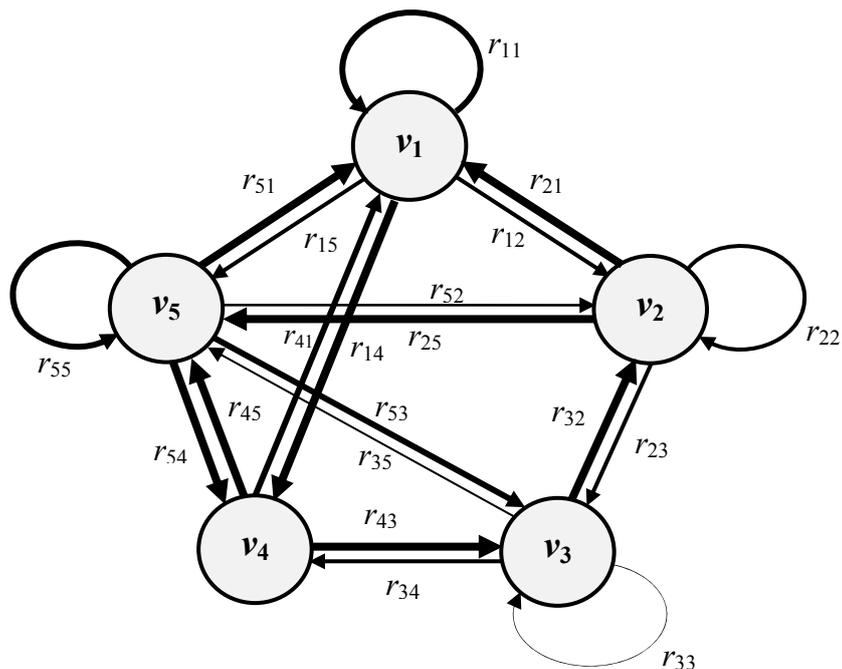


Рис. 1.6. Двусторонняя ресурсная сеть с петлями. Пример

Ресурсную сеть, состоящую из одного эргодического множества, будем называть *эргодической сетью*. Регулярные сети являются подклассом эргодических сетей. Эргодическая нерегулярная сеть, например цикл любой длины, имеет матрицу пропускных способностей, никакая степень которой не будет строго положительной. Таким образом, не существует такого количества шагов k , за которое малый ресурс распределится по всем вершинам, – в сети возникают незатухающие колебания.

На рис. 1.7 вершины v_1, \dots, v_5 образуют эргодическую, но не регулярную компоненту. Эргодическая компонента представляет собой цикл длины 5. Переходная компонента представлена подграфом с вершинами v_6, \dots, v_{10} .

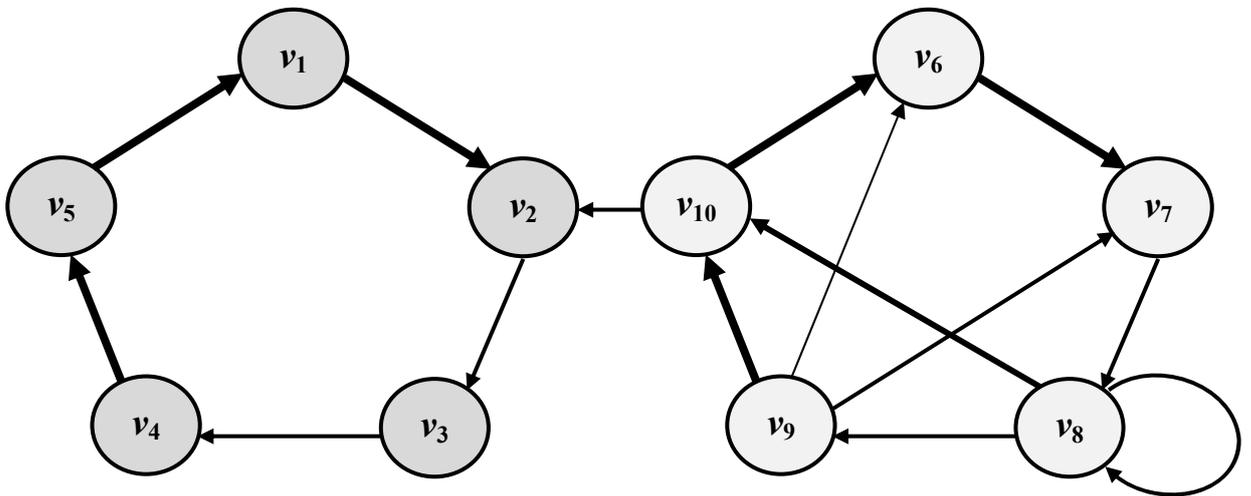


Рис. 1.7. Сеть с эргодической, но не регулярной компонентой

Компоненты графа, отличные от эргодических, называются *переходными*. В ресурсных сетях ресурс, покинувший переходную компоненту, уже не сможет туда вернуться. Исследование процессов поглощения ресурса эргодическими компонентами можно свести к исследованию сетей, эргодические множества которых состоят из единственной вершины, как это делается при описании цепей Маркова.

Вершина, не имеющая исходящих ребер, образует эргодическое множество. В сети она будет являться стоком: ресурс, попавший в нее, уже ее не покидает. Ресурсные сети со стоковыми вершинами будем называть *поглощающими ресурсными сетями*.

Сети с эргодической компонентой, представленной на рис. 1.7, будет соответствовать поглощающая сеть с одной стоковой вершиной (рис. 1.8).

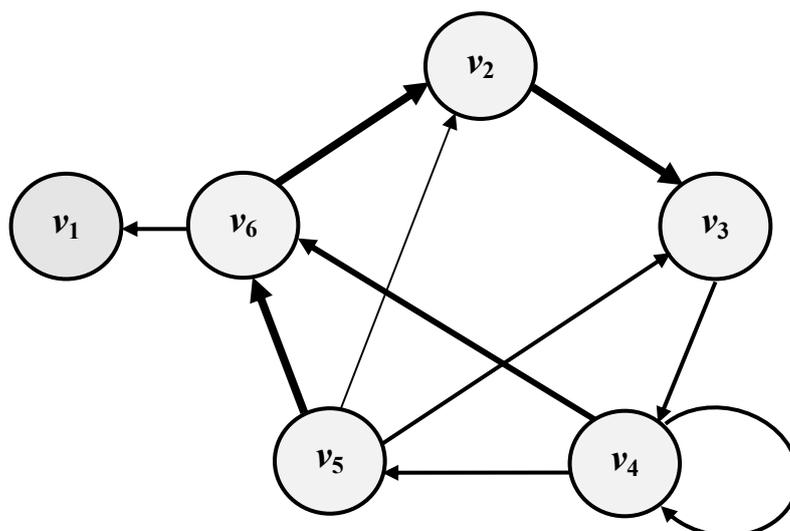


Рис. 1.8. Поглощающая ресурсная сеть с одним стоком

На рис. 1.9 представлено вложение классов.

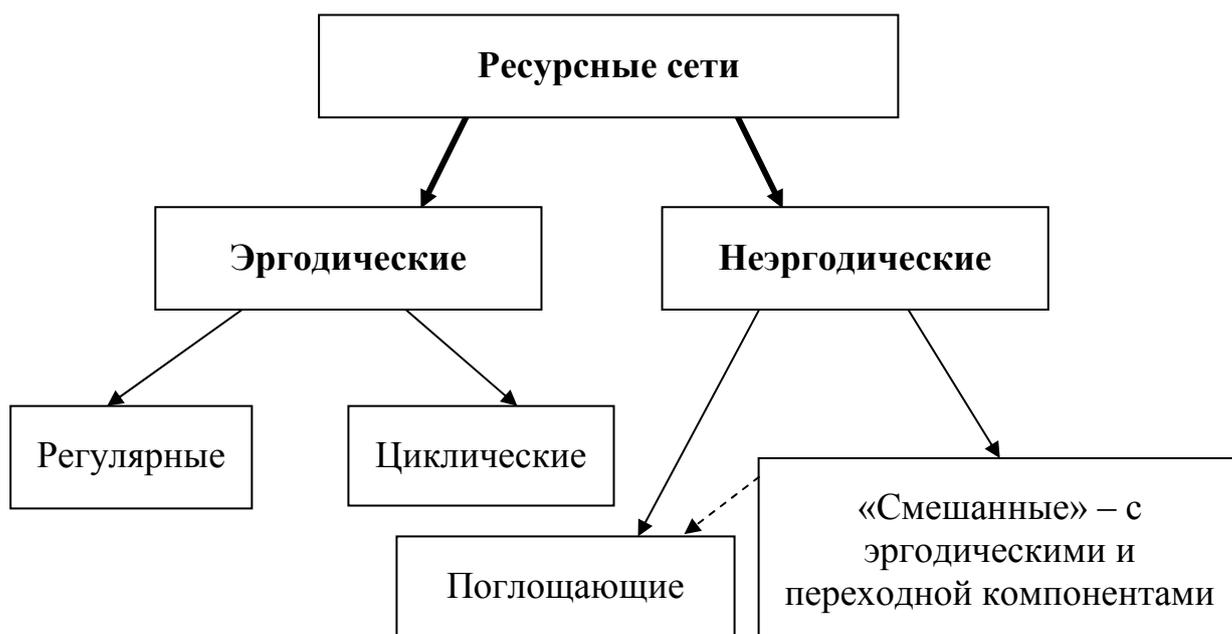


Рис. 1.9. Топологическая классификация ресурсных сетей

Обозначим эту классификацию через S_1 .

Пунктирная стрелка показывает, что изучение неэргодических сетей общего вида сводится к изучению соответствующих поглощающих сетей.

Главы 2-4 посвящены исследованию регулярных сетей. Эргодические нерегулярные сети будут исследованы в главе 5, поглощающие ресурсные сети – в главе 6.

1.4.3. Классификация ресурсных сетей по пропускным способностям

Классификация ресурсных сетей, приведенная в предыдущем разделе, задает разбиение множества сетей на классы в зависимости от топологии их графов и, как следствие, от свойств порождаемых ими цепей Маркова. Так, будет доказано, что устойчивые состояния каждого из классов обладают различными свойствами (а эргодические нерегулярные сети могут не обладать устойчивостью). Однако эта классификация недостаточна. В зависимости от пропускных способностей ребер сети проявляют различные особенности функционирования; методы их исследования тоже различны. Введем еще одну классификацию, не зависящую от первой.

Ресурсную сеть будем называть *однородной*², если пропускные способности всех ребер одинаковы. В противном случае будем называть сеть *неоднородной*.

Однородная сеть называется *полной*, если она представлена полным графом с петлями. Иными словами, матрица пропускной способности R полной однородной сети строго положительна и $\forall i, j \ r_{ij} = r$.

Неоднородная сеть, в свою очередь, делится на несколько подклассов.

Неоднородная ресурсная сеть называется *симметричной*, если симметрична ее матрица пропускной способности: $R = R^T$.

В симметричных сетях у каждой вершины входная и выходная пропускные способности совпадают. Однако конфигурации, обеспечивающие совпадение входов и выходов, не исчерпываются только симметричными сетями.

Ресурсная сеть называется *квазисимметричной*, если

$$(1.6) \quad \forall i \ r_i^{in} = r_i^{out} .$$

² Термин «однородная ресурсная сеть» не связан с понятием однородности цепи Маркова (см. разделы 1.2.1, 1.2.2).

Симметричные сети также являются квазисимметричными, поэтому несимметричные сети, удовлетворяющие (1.6), будем называть *собственно квазисимметричными*.

Если сеть не квазисимметрична, в ней существует хотя бы пара вершин, для которых $r_i^{in} - r_i^{out} \neq 0$. Для вершины v_i обозначим эту разность через Δr_i : $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$. Тогда все вершины сети можно разделить на три класса:

- 1) *вершины-приемники*, для которых $\Delta r_i > 0$;
- 2) *вершины-источники*, для которых $\Delta r_i < 0$;
- 3) *нейтральные вершины*, для которых $\Delta r_i = 0$.

В квазисимметричных сетях все вершины *нейтральны*.

Сеть будем называть *несимметричной*, если она не удовлетворяет условию квазисимметричности (1.6). Несимметричная сеть обладает как минимум одним источником и одним приемником.

$$(1.7) \quad \rho = \left((r_1^{in}; r_1^{out}), (r_2^{in}; r_2^{out}), \dots, (r_n^{in}; r_n^{out}) \right) -$$

кортеж, характеризующий вершины сети.

Представим классификацию в виде следующей схемы.

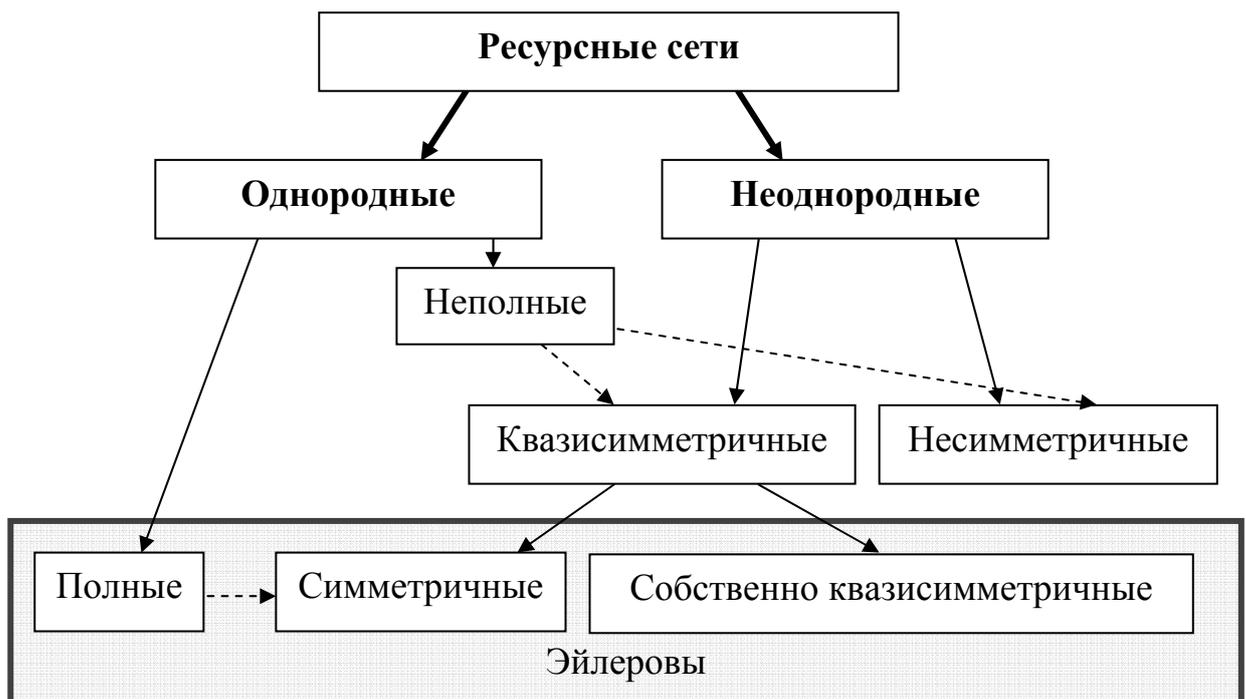


Рис. 1.10. Классификация ресурсных сетей по пропускным способностям

Из схемы видно, что три класса: полные однородные, симметричные и квазисимметричные сети объединены в общий класс *эйлеровых сетей*.

Все эти сети имеют общую особенность: у каждой вершины входная и выходная пропускные способности совпадают. В случае, когда пропускные способности целочисленны, такую сеть можно представить графом с кратными ребрами (единичной пропускной способности), в каждой вершине которого полустепень захода равна полустепени исхода. Сильно связный граф, обладающий таким свойством, является эйлеровым. Ресурсная сеть, у которой входная и выходная пропускные способности в каждой вершине совпадают, в таком случае представляет собой обобщение эйлерова графа. Поэтому далее будем называть такие сети *эйлеровыми ресурсными сетями*.

На схеме рис. 1.10 присутствуют стрелки двух типов. Сплошные стрелки задают древовидную структуру. Но, очевидно, эта структура не отражает всех связей между классами. В результате произошло укрупненное разделение на два класса: несимметричные и эйлеровы сети. (Полные однородные сети с петлями были исследованы в [83], – их свойства будут приведены в следующем разделе.) Эту классификацию будем обозначать C_2 .

Любой класс сетей, для которого можно сформулировать ряд утверждений, верных для всех представителей этого класса, и не выполняющихся для сетей из остальных классов, однозначно задается парой признаков из декартова произведения $C_1 \times C_2$. Классификацию сетей, используемую в настоящей работе, представим в виде матрицы:

Таблица 1. Классы ресурсных сетей и структура диссертации

$C_1 \backslash C_2$	Однородные	Несимметричные	Эйлеровы
Регулярные	Глава 1 (полные)	Глава 2, 3	Глава 2, 4
Циклические	Глава 5	Глава 5	Глава 5
Поглощающие	Глава 6	Глава 6	–

1.4.4. Полные однородные ресурсные сети

Полная однородная сеть была описана и исследована в [83]. Основные результаты, полученные для полных однородных сетей, следующие.

Для полной однородной существует порог, равный $rn^2 = r_{sum}$, при котором происходит выравнивание ресурса независимо от начального состояния сети. Иными словами:

1) если суммарный ресурс W сети не превосходит rn^2 , то при любом начальном состоянии сети ее предельным состоянием является вектор

$$Q^* = \left(\frac{W}{n}, \frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right);$$

2) если $W > rn^2$, то при любом начальном состоянии сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание не происходит.

Если $W > rn^2$, то предельное состояние перестает быть единственным: оно зависит от начального.

Значение $W = rn^2$ является пороговым. На него распространяется случай 1, при котором происходит выравнивание, и в предельном состоянии каждая вершина получает по rn ресурса. Это значение совпадает с суммарной входной и выходной способностями каждой вершины.

Для описания предельного состояния при больших ресурсах введем дополнительные обозначения. Пусть вершины упорядочены в соответствии с количеством ресурса, находящегося в них в начальном состоянии. И пусть в начальном состоянии первые k вершин имеют ресурс, превосходящий rn :

$$q_1(0) \geq \dots \geq q_k(0) > q_{k+1}(0) \geq \dots \geq q_n(0),$$

где $q_k(0) > rn$, а $q_{k+1}(0) \leq rn$.

Представим эти величины в следующем виде:

$$q_1(0) = rn + c_1(0), \dots, q_k(0) = rn + c_k(0),$$

$$q_{k+1}(0) = rn - d_{k+1}(0), \dots, q_n(0) = rn - d_n(0),$$

где все $c_i(0) > 0$, $d_i(0) \geq 0$.

Значения $c_i(0)$ называются начальным профицитом вершин, $d_i(0)$ – начальным дефицитом.

Суммарный начальный профицит: $c_{sum}(0) = \sum_{i=1}^k c_i(0)$, суммарный начальный дефицит, соответственно: $d_{sum}(0) = \sum_{i=k+1}^n d_i(0)$.

Поскольку в сети выполняется закон сохранения, нетрудно убедиться в выполнении соотношения:

$$c_{sum}(0) - d_{sum}(0) = c_{sum}(t) - d_{sum}(t) = W - rn^2 = p.$$

В соответствии с введенными определениями, первые k вершин составляют зону $Z^+(0)$, а остальные вершины – зону $Z^-(0)$.

Предельным состоянием сети с таким начальным состоянием является вектор

$$Q^* = (q_1 - w, \dots, q_l - w, rn, \dots, rn),$$

где $l = k$ и $w = \frac{d_{sum}(0)}{k}$, если $c_k(0) \geq \frac{d_{sum}(0)}{k}$;

в противном случае $l \leq k$ – наибольшее целое число, такое, что

$$c_l(0) \geq w_l,$$

$$\text{где } w_l = \frac{c_{sum}^l(0) - p}{l}, \quad c_{sum}^l = \sum_{i=1}^l c_i(0).$$

Эти формулы показывают, что зона $Z^+(0)$ может оставаться прежней (случай $l = k$), или сужаться со временем (случай $l < k$).

То есть, в предельном состоянии в зоне Z^{+*} могут остаться лишь вершины из $Z^+(0)$ – ни одна другая вершина не способна аккумулировать ресурс выше порогового значения rn .

«Физический смысл» этих формул пояснен в примере 1.2.

Пример 1.2. Полная однородная сеть с семью вершинами и пропускными способностями $r = 1$.

Для этой сети $r_{sum} = 49$, $W = 54$; вектор начального состояния $Q(0) = (30, 15, 9, 0, 0, 0, 0)$. Первые три вершины находятся в зоне $Z^+(0)$.

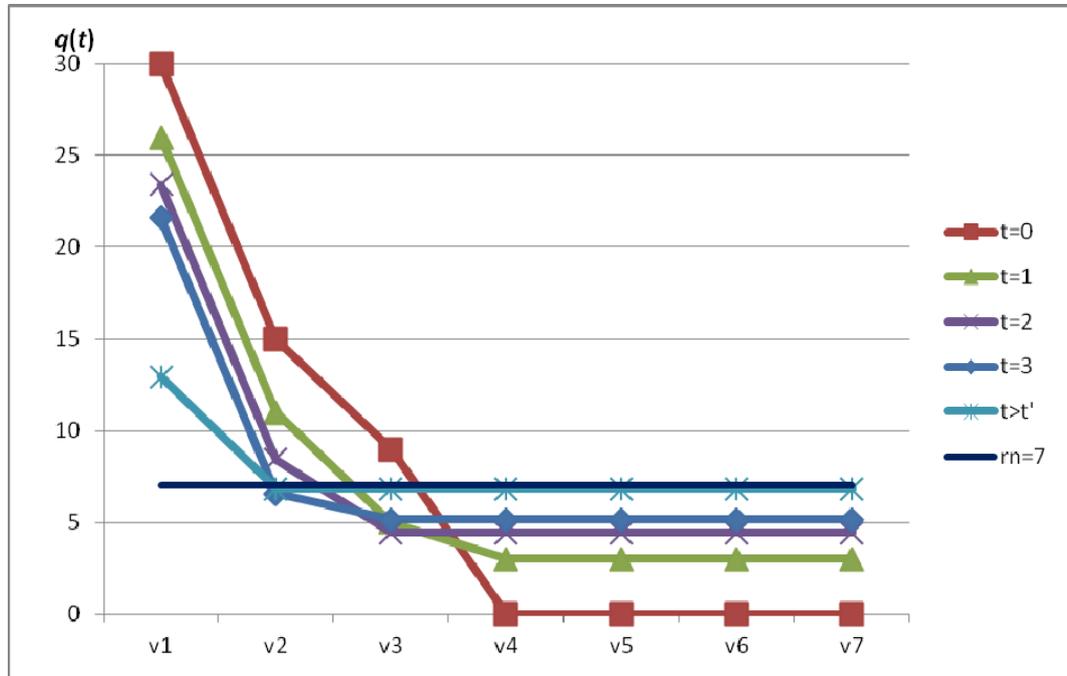


Рис. 1.11. Динамика состояний полной однородной сети

На рис. 1.11 ломаными линиями представлены состояния сети $Q(t)$ в несколько первых моментов времени и вблизи предельного состояния. При $t = 0$ зона $Z^+(0)$ содержит три вершины. При функционировании сети ломаная левее $k = 3$ начинает опускаться параллельно самой себе, поскольку вершины из зоны Z^+ отдадут по полной выходной пропускной способности, т.е. отдадут одинаковое количество ресурса, равное 7. На первом же такте вершина v_3 переходит в зону $Z(1)$. На третьем такте к ней присоединяется вершина v_2 . Таким образом, в зоне Z^{+*} остается всего одна вершина.

Ресурс всех остальных вершин выравнивается на отметке $rn = 7$.

На рис. 1.12, в отличие от рис. 1.11, представлена динамика количества ресурса в каждой вершине.

На нем видно, что ресурс первой вершины стабилизируется в зоне Z^{+*} , а вторая и третья вершины на разных тактах переходят в зону $Z(t)$.

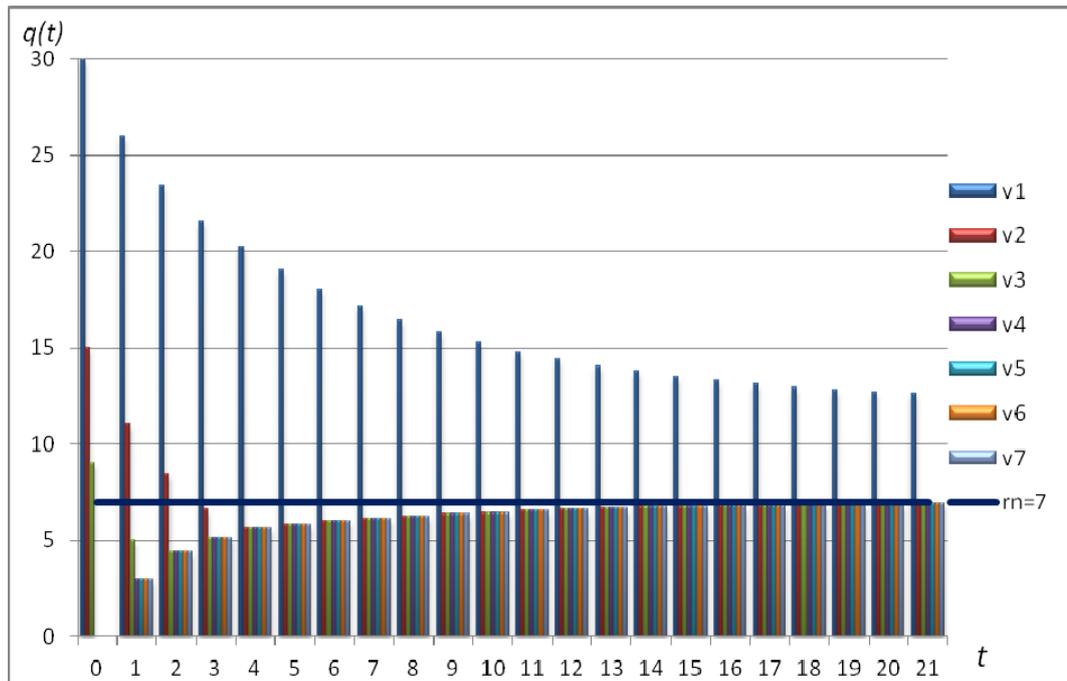


Рис. 1.12. Динамика ресурса в вершинах

Следует отметить, что в однородных сетях ресурс в каждой вершине зоны $Z(t)$ один и тот же, и после попадания туда новой вершины он выравнивается в ней на следующем же такте.

При начальном состоянии $Q(0) = (30, 15, 9, 0, 0, 0, 0)$ первые две вершины переходят из зоны $Z^+(0)$ в зону $Z(t)$. Для иллюстрации поведения вершин из зон $Z^+(t)$ и $Z(t)$ рассмотрим функционирование этой же сети с начальным состоянием, при котором обе зоны остаются неизменными на протяжении всего функционирования сети.

Пусть $Q(0) = (30, 25, 20, 0, 0, 0, 0)$. $W = 75$. Из рис. 1.13 видно, что в зоне $Z^+(t)$ ломаная опускается параллельно самой себе, а в зоне $Z(t)$ ресурсы одинаковы, и ломаная поднимается также параллельна самой себе.

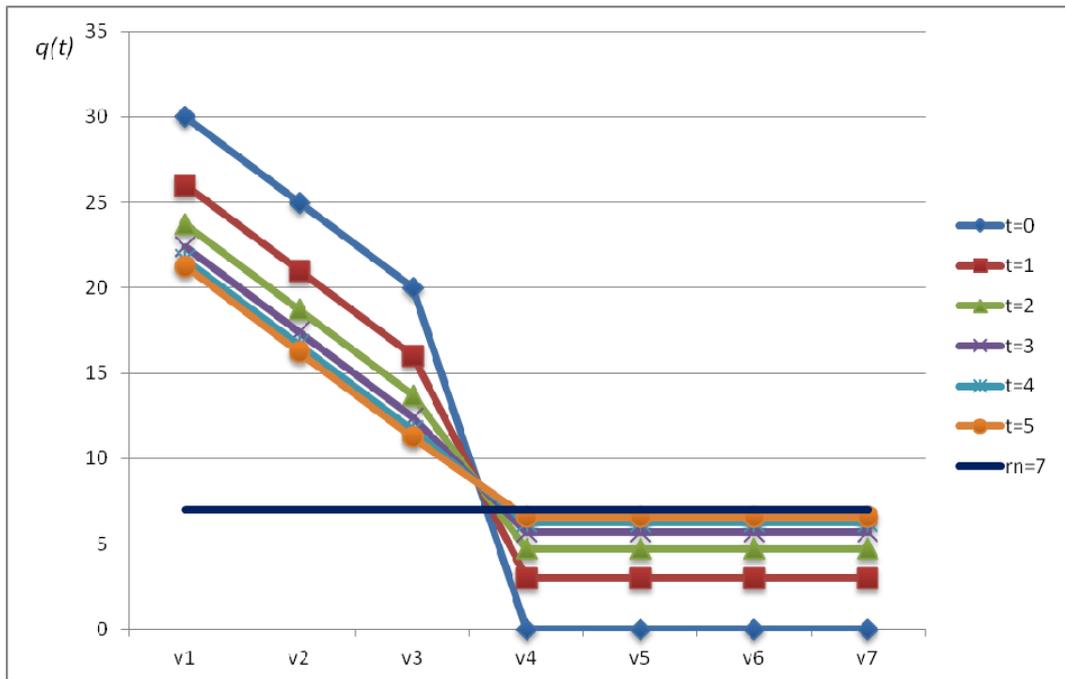


Рис. 1.13. Динамика ресурса в вершинах

На рис. 1.14 представлена динамика ресурса для той же сети с семью вершинами и начальным состоянием $Q(0) = (15, 12, 9, 5, 3, 1, 0)$. $r_{sum} = 49$, $W = 45 < r_{sum}$, все вершины за конечное число тактов переходят в зону $Z(t)$.

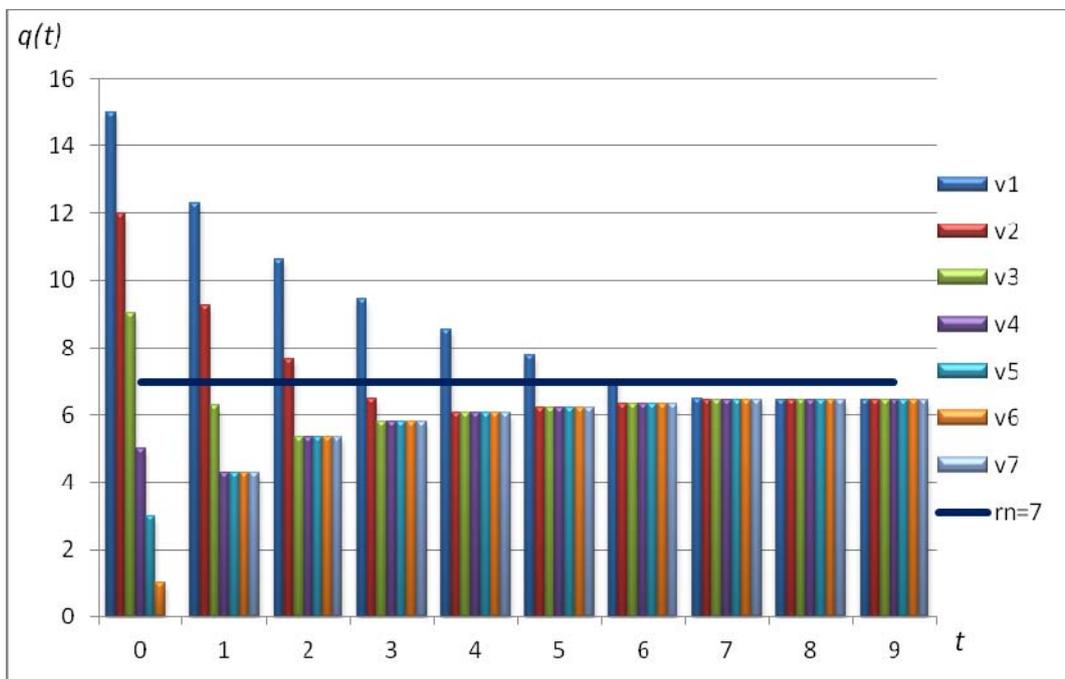


Рис. 1.14. Выравнивание зоны $Z(t)$

Из рисунка видно, что на первом же такте ресурсы вершин из $Z(0)$ стали одинаковыми, и затем выравнивается ресурс и в остальных вершинах, по мере того, как их ресурс становится меньше 7.

Этот результат вытекает непосредственно из свойства 1 для однородных полных сетей, описанного в [83]:

Свойство 1.1. Если для некоторого t $q_i(t) = q_j(t)$, то для всех $t' > t$ $q_i(t') = q_j(t')$.

Это следует из того, что с момента t обе вершины получают и отдают одинаковое количество ресурса. Если вершины находятся в зоне $Z(t)$, то они отдают весь свой ресурс (в соответствии с правилом 2), и их ресурс на такте $t+1$ целиком состоит из вновь прибывшего. А получают они одинаково, так как сеть полна и однородна.

Таким образом, для полных однородных сетей предельные состояния описаны при любом количестве ресурса.

Неполные однородные сети уже не обладают рядом свойств полных сетей. Исследование предельного состояния при больших ресурсах в них оказывается более сложным.

1.4.5. Ресурсная сеть и динамические графовые модели

В исследовании функционирования ресурсных сетей с различными топологиями при различном суммарном ресурсе и различных начальных состояниях ставится несколько задач:

- 1) исследование динамики вектора состояния;
- 2) исследование динамики входящего и исходящего потоков в вершинах, а также суммарного потока;
- 3) исследование сходимости процессов распределения ресурса (существование предельного состояния и предельного потока);
- 4) исследование зависимости предельного состояния от начального состояния;
- 5) описание векторов предельного состояния и потока и выражение их через параметры сети (матрица пропускных способностей, количество ресурса, начальное состояние).
- 6) задача управления: для классов сетей, в которых предельное состояние

зависит от начального, получить заданное предельное состояние, управляя начальным состоянием.

Рассмотрим основные отличия ресурсных сетей от тех наиболее близких им моделей, которые были рассмотрены в настоящей главе.

Потоковые модели. Ресурсная сеть является потоковой моделью, и, тем самым наследует основные понятия и терминологию, используемую в этой области. Однако все потоковые модели, как классические, так и их различные модификации, рассматривают выделенные пути в графах. Более того, в потоковых моделях имеется направленность потока от источника к стоку. В ресурсных сетях распространение ресурса происходит по всем направлениям одновременно, и это делает ее гораздо ближе к моделям рассеяния на графах, нежели к потоковым моделям. Как и модели рассеяния, она является интегральной по путям.

Случайные блуждания и рассеяние на графах. Сеть, в которой все вершины функционируют по правилу 2, как будет показано, описывается цепью Маркова. Однако при увеличении суммарного ресурса наступает насыщение, и по крайней мере одна вершина в сети начинает функционировать по правилу 1. С другой стороны, будет доказано, что при любом, даже очень большом количестве ресурса в определенном широком классе сетей все вершины никогда не перейдут на правило 1. Наличие двух множеств вершин, функционирующих по разным правилам, повышает выразительную силу модели, но и затрудняет ее исследование. Предельное состояние в таких сетях уже не всегда единственно. В некоторых классах сетей оно зависит от начального состояния. Функционирование сети начинает описываться неоднородной цепью Маркова. Для классов эйлеровых и поглощающих сетей в этом случае оказалось возможным получить аналитические результаты для предельных состояний, однако для некоторого подкласса несимметричных сетей существуют начальные состояния, для которых предельное состояние в выделенных вершинах можно предсказать лишь с некоторой погрешностью (в остальных вершинах предельное

количество ресурса определяется однозначно и не зависит от начального состояния). Таким образом, когда хотя бы одна вершина сети переходит на правило 1, аппарат однородных цепей Маркова перестает описывать процессы, происходящие в ней.

Игра выстреливания фишек. Если ресурсная сеть, функционирующая по правилу 2, эквивалентна рассеянию на графе, то вершины, функционирующие в сети по правилу 1, действуют сходно с выстреливанием вершин в игре chip-firing. Основные отличия – это, в первую очередь, уже упомянутое свойство ресурсной сети: для всех не-эйлеровых сетей состояние, в котором все вершины функционируют по правилу 1, является неустойчивым, и часть вершин за конечное число тактов теряют ресурс. Но если в chip-firing в этих вершинах происходит остановка, то вершины ресурсной сети продолжают функционировать, переходя на правило 2.

Второе отличие: последовательность выстреливаний в chip-firing games. Последовательность в этих играх введена не случайно: весь аппарат их исследования базируется на том, что вершины выстреливают поочередно. В параллельном варианте chip-firing исследуются бесконечные периодические игры в терминах длины периода игры и количества фишек, участвующих в выстреливании. И это говорит еще о двух взаимосвязанных важных отличиях.

Игра выстреливаний является целочисленной и пороговой. Если вершина не накопила фишек для выстрела, она находится в пассивном состоянии. В [157] упоминается возможность рассмотрения вещественнозначной игры, названной ими mass-firing game. В этой игре ребрам приписываются вещественные веса (пропускные способности). Правила игры остаются теми же: вершина может выстрелить, если и только если она накапливает массу больше, чем суммарные веса исходящих ребер. Но далее авторы пишут, что при целых или рациональных пропускных способностях игра сводится к chip-firing, а вещественнозначные игры

интересны лишь в случае исследования марковских цепей с иррациональными вероятностями перехода. Однако вещественнозначность может пониматься совсем в ином смысле – как это было положено в основу функционирования ресурсных сетей. Ресурс является бесконечно делимым, и каждая вершина отдает ресурс на каждом такте, каким бы его количеством она ни обладала. Такая формулировка позволяет моделировать непрерывные пороговые процессы, для которых игры выстреливания неприменимы.

Если, например, *chip-firing* хорошо моделирует лавинообразные процессы, в которых масса должна достичь некоторой критической отметки, прежде чем процесс начнется, то ресурсные сети предназначены для моделирования непрерывных явлений – их пороговость состоит не в отсутствии деятельности при значениях ниже порога, а в смене правила функционирования. Так, вода в резервуаре не задерживается, если она втекает и вытекает с одинаковой скоростью, но стоит увеличить мощность входящего потока, оставив прежним выходящий, как в резервуаре начинает происходить накопление. Именно такие процессы соответствуют распределению ресурса в ресурсной сети.

Так, в восьмой главе представлена модель распространения загрязняющего вещества в водной акватории. Инерционность процесса в модели можно изменять за счет добавления петель в вершины и управления пропускными способностями: чем больше пропускная способность петли, тем больше вещества остается на месте, чем меньше пропускные способности исходящих ребер, тем меньше скорость распространения.

Выводы

1. Произведена классификация графовых моделей в зависимости от применяемых подходов и решаемых задач.

2. Рассмотрены классическая потоковая модель Форда – Фалкерсона и ее модификации, как статические, так и динамические, и некоторые другие потоковые модели.

3. Описаны процессы рассеяния на графах, указан ряд задач, сводящихся к этим моделям.

4. Введены основные определения и приведены некоторые результаты из области цепей Маркова и теории матриц.

5. Описана пороговая модель chip-firing game и ее модификации.

6. Описана модель самоорганизующейся критичности «куча песка». Рассмотрена ее интерпретация в терминах chip-firing game.

7. Введено понятие ресурсной сети. Даны определения основных параметров сети, ее состояний и потока в ней.

8. Введены две независимые классификации ресурсных сетей: по топологии (C_1) и по пропускным способностям (C_2). Построена матрица классов сетей, в которой указаны все допустимые пары из декартова произведения $C_1 \times C_2$.

9. Описаны полные однородные ресурсные сети.

10. Описаны основные сходства и различия ресурсной сети со всеми перечисленными типами моделей. Показано, что существуют задачи, которые нельзя сформулировать в рамках существующих моделей, формулирующиеся и решаемые в терминах ресурсной сети. Одной из таких задач является представленная в настоящей работе модель распространения вещества в водной среде.

ГЛАВА 2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В РЕГУЛЯРНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ. СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрим функционирование регулярных сетей. Поскольку ресурсная сеть является пороговой моделью, естественно рассматривать отдельно случаи, когда все вершины функционируют по правилу 2, и случаи, когда одна или несколько вершин функционируют по правилу 1. Очевидно, для каждой сети можно задать количество ресурса, соответствующее обоим случаям. Кроме этого, гипотетически возможны варианты, когда при увеличении суммарного ресурса всё большее количество вершин устойчиво переходит на правило 1. Тогда существует несколько пороговых значений, ресурса, при переходе через которые множество вершин, функционирующих по правилу 1, расширяется. В настоящей главе будет рассмотрен случай, когда все вершины регулярной сети функционируют по правилу 2; будут рассмотрены регулярные несимметричные сети и исследованы переходные процессы, происходящие при увеличении суммарного ресурса вплоть до смены правила функционирования.

2.1. Предельное состояние регулярной сети при $W = 1$

Пусть в сети с регулярной матрицей R циркулирует единичный ресурс $W = 1$, а матрица пропускной способности R удовлетворяет условию: для любого $r_{ij} \neq 0$ выполняется неравенство $r_{ij} \geq 1$. Тогда все вершины функционируют по правилу 2; на каждом такте t вершины отдают весь свой ресурс и их новый ресурс будет состоять только из вновь пришедшего.

Для вектора распределения единичного ресурса введем обозначение $Q^1(t)$. Каждая вершина получает ресурс из всех остальных вершин и ресурс из своей петли, отданный на предыдущем такте t . Функционирование сети по правилу 2 можно записать в виде итерационного процесса:

$$Q^1(t+1) = Q^1(t) \cdot R',$$

где матрица R' получается из матрицы пропускных способностей R нормированием строк:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \dots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \dots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

$R' = D^{-1}R$, где $D = \text{diag}(r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$. R' – матрица, стохастическая по строкам.

Стохастическая матрица R' , описывающая изменение ресурса по правилу 2, с начальным вектором распределения единичного ресурса $Q^1(0) = (q_1^1(0), q_2^1(0), \dots, q_n^1(0))$ задает регулярную цепь Маркова.

Непосредственно из результатов, полученных для цепей Маркова, следует ряд утверждений для ресурсных сетей с ресурсом $W = 1$ [28, 75].

1) для любой регулярной сети существует $\lim_{h \rightarrow \infty} (R')^h = R'^{\infty}$;

2) для любого начального распределения единичного ресурса ($W = 1$) вектор предельного распределения Q^{1*} существует, единствен и находится по формуле

$$Q^{1*} = Q^1(0) \cdot R'^{\infty};$$

2') кроме того, для любого $t > 0$ верно равенство

$$Q^{1*} = Q^1(t) \cdot R'^{\infty};$$

3) матрица R'^{∞} состоит из n строк Q^{1*} :

$$(2.1) \quad R'^{\infty} = \mathbf{1} \cdot Q^{1*},$$

где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц;

4) вектор Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы R' , соответствующим собственному числу $\lambda = 1$:

$$Q^{1*} R' = Q^{1*};$$

5) любой столбец матрицы (2.1) является правым собственным вектором матрицы R' ;

6) Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы R'^{∞} :
 $Q^{1*} \cdot R'^{\infty} = Q^{1*}$;

7) $Q^{1*} > 0, R'^{\infty} > 0$.

Из п. 2) следует, что предельное состояние сети с единичным ресурсом не зависит от начального.

З а м е ч а н и е. В разделе 1.2.4 первой главы описана связь матрицы R^∞ с лапласовской матрицей графа, построенного по стохастической матрице R' : $L = E - R'$. Матрица R^∞ является собственным проектором матрицы L . Для этих матриц выполняется [196, 203, 3]:

$$R^\infty L = L R^\infty = 0, \text{rank } R^\infty = \nu, \text{rank } L = n - \nu.$$

Также этот проектор совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов орграфа, полученного из исходного орграфа сети изменением ориентации ребер [1]. Лесная размерность орграфа регулярной сети равна единице, и, соответственно, $\text{rank } R^\infty = 1$, что согласуется с формулой (2.1). Матрица R^∞ может быть найдена с помощью любого аннулирующего многочлена для лапласовской матрицы L [139].

2.2. Предельное состояние регулярной сети при малых ресурсах

Пусть значение W таково, что, начиная с некоторого момента t' , все вершины сети функционируют по правилу 2, т.е. находятся в зоне $Z^-(t)$. Такая величина W всегда существует: например, при $W < \min_i r_i^{out}$, ни одна вершина заведомо не может оказаться в Z^+ .

Т е о р е м а 2.1. В регулярной сети для любого ресурса W , при котором $\exists t' > 0: \forall t > t' \nu_i \in Z^-(t), i = 1, \dots, n$, для любого начального состояния $Q(0)$ вектор предельного состояния Q^* :

1) существует;

2) единствен;

3) является левым собственным вектором стохастической матрицы R' и предельной матрицы R^∞ собственного числа $\lambda = 1$:

$$Q^* = Q^* \cdot R' \text{ и } Q^* = Q^* \cdot R^\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку в начальном состоянии ресурс распределен по вершинам произвольно, то некоторое конечное число тактов

часть вершин может функционировать по правилу 1. Но по условию теоремы существует момент времени t' , начиная с которого все вершины окажутся в зоне $Z(t)$ и начнут функционировать по правилу 2. Тогда для любого $t \geq t'$ функционирование сети описывается формулой:

$$Q(t+1) = Q(t) \cdot R',$$

где R' – стохастическая матрица.

Для любого k верно:

$$(2.2) \quad Q(t+k) = Q(t) \cdot R'^k.$$

Поскольку R'^{∞} существует, то при $k \rightarrow \infty$ для правой части (2.2) имеет место равенство:

$$Q(t) \lim_{k \rightarrow \infty} (R')^k = Q(t) R'^{\infty}.$$

Тогда и левая часть (2.2) сходится к некоторому предельному вектору:

$$(2.3) \quad Q^* = Q(t) \cdot R'^{\infty}.$$

Таким образом, вектор предельного состояния существует и может быть найден из любого промежуточного состояния $Q(t)$ ($t \geq t'$). Так как (2.3) верно для любого $t \geq t'$, то, осуществив еще один предельный переход, получим:

$$(2.4) \quad Q^* = Q^* \cdot R'^{\infty}.$$

Отсюда следует, что Q^* – левый собственный вектор матрицы R'^{∞} с собственным числом $\lambda = 1$.

Из (2.4) следует, что

$$Q^* \cdot R' = Q^* \cdot R'^{\infty} \cdot R' = Q^* \cdot R'^{\infty} = Q^*.$$

Q^* – левый собственный вектор матрицы R' , соответствующий $\lambda = 1$. По теореме Фробениуса этот вектор единствен. Таким образом, доказаны все утверждения теоремы. \square

При функционировании сети по правилу 2 вектор предельного состояния является собственным вектором матрицы R' . Но поскольку положительный собственный вектор матрицы R' единствен, все векторы

предельного состояния линейно зависимы. Для двух значений ресурса W_1 и W_2 справедливо равенство:

$$\frac{Q_1^*}{W_1} = \frac{Q_2^*}{W_2}.$$

Тогда для каждого значения W , при котором сеть функционирует по правилу 2, координаты вектора предельного состояния Q^* можно выразить через вектор Q^{1*} :

$$(2.5) \quad Q^* = Q^{1*} \cdot W.$$

Таким образом, предельное состояние при малых ресурсах (таких ресурсах, при которых все вершины за конечное время переходят в зону $Z(t)$) существует и единственно, независимо от вида матрицы пропускной способности сети. Достаточно того, чтобы она была регулярной.

При малых ресурсах однородные, симметричные, квазисимметричные и несимметричные сети демонстрируют одинаковое поведение.

Однако если количество ресурса в сети велико, – так, что при больших t существует по крайней мере одна вершина, принадлежащая зоне $Z^+(t)$, функционирование сетей разных классов начинает сильно отличаться. Рассмотрим функционирование несимметричных сетей при больших ресурсах.

2.3. Регулярные несимметричные сети и их свойства

Несимметричные сети обязательно содержат вершины двух типов: вершины-источники, у которых суммарная выходная пропускная способность превосходит входную, и вершины-приемники, у которых большей является входная пропускная способность. Кроме того, несимметричные сети могут иметь нейтральные вершины, у которых оба эти значения совпадают. Количества приемников и источников не обязательно равны.

Пусть среди n вершин сети имеется l вершин-приемников, k источников и $n - l - k$ нейтральных вершин. Будем считать, что приемники

имеют номера от 1 до l , источники – от $l + 1$ до $l + k$, нейтральные вершины – от $l + k + 1$ до n .

Путь от нейтральной вершины к источнику, не содержащий вершин-приемников, назовем *неположительным путем*.

Множество вершин, у которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$, как и раньше, будем называть зоной $Z(t)$, а множество вершин с $q_i(t) > r_i^{out}$ – зоной $Z^+(t)$. Вершины из $Z(t)$ функционируют по правилу 2, а вершины из $Z^+(t)$ – по правилу 1.

Несимметричные сети обладают рядом свойств, не присущих другим классам сетей, таким, например, как эйлеровы сети. Это объясняется наличием вершин разных типов: приемников и источников. Эти свойства проявляются при достаточно большом суммарном ресурсе, так как в предыдущих разделах было показано, что если все вершины функционируют по правилу 2, процесс перераспределения ресурса описывается регулярной цепью Маркова при любой матрице пропускных способностей (достаточно, чтобы она была регулярной) и сходится к единственному предельному состоянию.

В несимметричных сетях лишь некоторые вершины при $t \rightarrow \infty$ могут получить или сохранить большое количество ресурса. Все остальные вершины имеют ресурс, меньший своей выходной пропускной способности.

Опишем свойства динамики несимметричных сетей.

Свойство 2.1. Если для некоторого момента времени t' $q_i(t') \leq r_i^{in}$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \leq r_i^{in}$, ($i > l$).

Доказательство этого свойства состоит в том, что у вершин-источников и нейтральных вершин входная пропускная способность не превосходит выходную, а следовательно, если в какой-то момент времени $q_i(t') \leq r_i^{in}$, то следовательно, $q_i(t') \leq r_i^{out}$, а значит вершина функционирует по

правилу 2 и отдает весь свой ресурс, а принять она на каждом такте не может больше чем r_i^{in} . \square

Для вершин-источников условие $q_i(t) \leq r_i^{in}$ сильнее условия $v_i \in Z(t)$, для нейтральных вершин эти условия равносильны. Поэтому из свойства 2.1 следует, что при переходе в зону $Z(t)$ вершина уже никогда не покинет эту зону.

Свойства 2.2 и 2.3 описывают функционирование сетей при некоторых ограничениях на их топологию.

Свойство 2.2. Если в матрице R имеются одинаковые столбцы с номерами $i, j > l$, и вершины v_i, v_j имеют неположительные пути, то существует момент t' , что для всех $t > t'$ $q_i(t) = q_j(t)$ ($i, j > l$).

При таких условиях с некоторого момента t' обе вершины перейдут на правило 2 и будут отдавать весь свой ресурс, а получают они одинаковое количество ресурса по условию.

Это свойство интересно тем, что вершины v_i и v_j могут иметь различные выходные пропускные способности, могут даже принадлежать к разным классам: одна из них может быть нейтральной, другая – вершиной-источником. Выходная пропускная способность не влияет на ресурс вершины, функционирующей по правилу 2.

Свойство 2.3. В процессе функционирования несимметричной сети ресурс в вершинах может временно стабилизироваться, а затем снова изменяться.

Это происходит, когда ресурс в сети намного превосходит ее суммарную пропускную способность, и в начальном состоянии он расположен в источнике или нейтральной вершине (строго говоря, эта вершина не должна быть аттрактором, но определение аттрактора будет дано ниже). Тогда при перераспределении ресурса от источника (нейтральной вершины) к приемнику во всех остальных вершинах происходит насыщение,

и ресурс в них стабилизируется на значении их входной пропускной способности.

Проиллюстрируем все три свойства следующим примером.

Пример 2.1. Пусть сеть с пятью вершинами задана матрицей пропускной способности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта сеть обладает одним приемником v_1 , одной нейтральной вершиной v_2 и тремя источниками v_3, v_4, v_5 . Все вершины v_2, \dots, v_5 имеют разные выходные пропускные способности, но входные способности у них совпадают.

Суммарный ресурс $W = 40$ находится в нейтральной вершине v_2 : Начальное состояние $Q(0) = (0, 40, 0, 0, 0)$. Протокол функционирования сети представлен в табл. 2.1. и на гистограмме (рис. 2.1).

Пример иллюстрирует все три свойства: ресурс вершин, попавших в зону $Z(t)$ не превышает значения r_i^{in} (свойство 1), в вершинах v_2, \dots, v_5 в процессе функционирования ресурс выравнивается (свойство 2.2) и временно стабилизируется (свойство 2.3).

Таблица 2.1. Распределение ресурса – протокол работы сети³

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0.000	40.000	0.000	0.000	0.000
1	1.000	36.000	1.000	1.000	1.000
2	2.684	32.579	1.579	1.579	1.579
3	3.880	29.714	2.135	2.135	2.135
4	4.945	27.299	2.585	2.585	2.585
5	5.826	25.268	2.969	2.969	2.969
6	7.232	23.393	3.125	3.125	3.125
7	8.870	21.577	3.184	3.184	3.184
8	10.596	19.784	3.207	3.207	3.207
9	12.355	17.999	3.215	3.215	3.215
10	14.127	16.218	3.218	3.218	3.218

³ Распределение ресурса происходит в бесконечном времени, в таблице представлены такты до стабилизации в третьем знаке.

11	15.903	14.438	3.220	3.220	3.220
12	17.682	12.658	3.220	3.220	3.220
13	19.461	10.878	3.220	3.220	3.220
14	21.240	9.099	3.220	3.220	3.220
15	23.020	7.319	3.220	3.220	3.220
16	24.799	5.539	3.220	3.220	3.220
17	26.579	3.760	3.220	3.220	3.220
18	28.110	2.972	2.972	2.972	2.972
19	29.116	2.721	2.721	2.721	2.721
20	29.699	2.575	2.575	2.575	2.575
...					
29	30.494	2.377	2.377	2.377	2.377
30	30.496	2.376	2.376	2.376	2.376
31	30.498	2.376	2.376	2.376	2.376
32	30.498	2.375	2.375	2.375	2.375
33	30.499	2.375	2.375	2.375	2.375
...

Процесс распределения делится на три этапа. **На первом этапе** (такты 0-10) вершины v_2, \dots, v_5 набирают ресурс до некоторого максимального значения. **На втором этапе** (такты 11-17) в этих вершинах происходит стабилизация, а перераспределение идет между нейтральной вершиной v_2 и приемником v_1 . **На третьем этапе** (такты с 18-го) ресурс вершины v_2 становится меньше ее выходной пропускной способности, и ресурсы в четырех вершинах выравниваются.

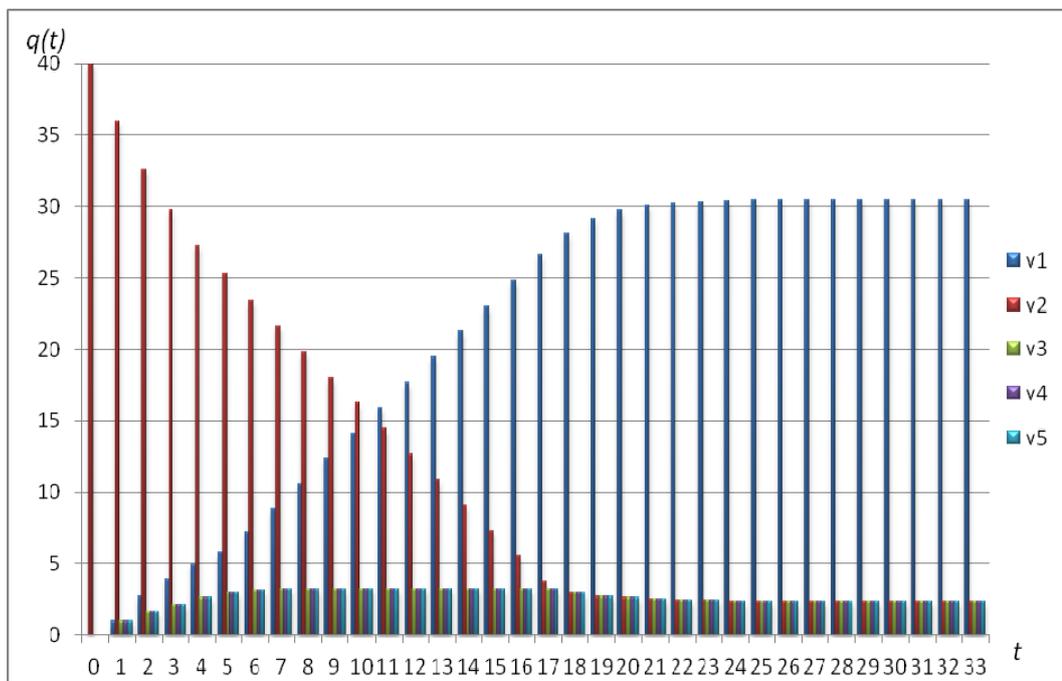


Рис. 2.1. Протокол работы сети

Теорема 2.2. В регулярной несимметричной сети для всех источников и нейтральных вершин, из которых имеются неположительные пути, для любого суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ существует такой момент времени t' , что для любого $t > t'$ выполнится неравенство:

$$(2.6) \quad q_i(t) < r_i^{in}, \quad i > l.$$

Доказательство. Из свойства 2.3 следует, что вершины, находящиеся в начальном распределении в зоне $Z(0)$, останутся в этой зоне. Для таких вершин неравенство (3.1) выполнится автоматически. Рассмотрим отдельно источники и нейтральные вершины из зоны $Z^+(0)$.

1. Для вершин-источников формула (2.6) следует из неравенства $r_i^{in} < r_i^{out}$, $i = l+1, \dots, l+k$. Если ресурс вершины-источника с номером m в начальном распределении $q_m(0)$ больше r_m^{out} , то эта вершина будет функционировать по правилу 1, т.е. отдавать за каждый такт по r_m^{out} единиц ресурса. Принять же эта вершина может только $r_m^{in} < r_m^{out}$. Тогда за каждый такт ресурс вершины-источника будет уменьшаться на некоторую ограниченную снизу величину r' : $r' \geq \Delta r_m = |r_m^{in} - r_m^{out}|$. Таким образом, как бы ни был велик начальный ресурс в этой вершине, за конечное число тактов t_m вершина-источник перейдет на правило 2. Величину t_m можно оценить сверху:

$$(2.7) \quad t_m \leq \frac{q_m(0) - r_m^{out}}{\Delta r_m}.$$

Как только источник перейдет на правило 2, его петля получит ресурса меньше, чем пропускная способность этой петли r_{mm} , которая входит одним из слагаемых в r_m^{in} , и выполнится неравенство (2.6).

2. Докажем выполнение неравенства (2.6) для нейтральных вершин с неположительными путями. Каждая такая вершина связана хотя бы с одним источником прямо или через другие нейтральные вершины.

Функционирующая по правилу 1 нейтральная вершина v_j , смежная источнику v_m , начнет отдавать ресурс больше, чем получать, после того, как этот источник перейдет на правило 2. Тогда в ребро (v_m, v_j) пойдет ресурс, который меньше r_{mj} . А это означает, что через конечное число тактов ресурс $q_j(t)$ удовлетворит условию (2.6). Это число тактов t_j можно оценить следующим образом: $t_j = t_m + t_j'$, где t_m и t_j' оцениваются по формуле (2.7): t_m – для источника v_m , t_j' – для нейтральной вершины v_j после того, как источник перешел на правило 2.

На следующем такте все нейтральные вершины, смежные v_j , также начнут получать из v_j ресурс, который меньше пропускной способности ребра. Таким образом, за конечное число тактов для всех нейтральных вершин и вершин-источников выполнится неравенство (2.6). Это число и обозначим t' . \square

Если в сети для некоторых нейтральных вершин не существует неположительных путей, эти вершины, имея в начальном распределении излишек ресурса, остаются в зоне $Z^+(t)$. Рассмотрим пример.

Пример 2.2. Сеть с шестью вершинами задана матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W = 50, Q(0) = (0, 0, 0, 0, 50, 0).$$

Матрица пропускной способности соответствует сети, представленной на рис. 2.2.

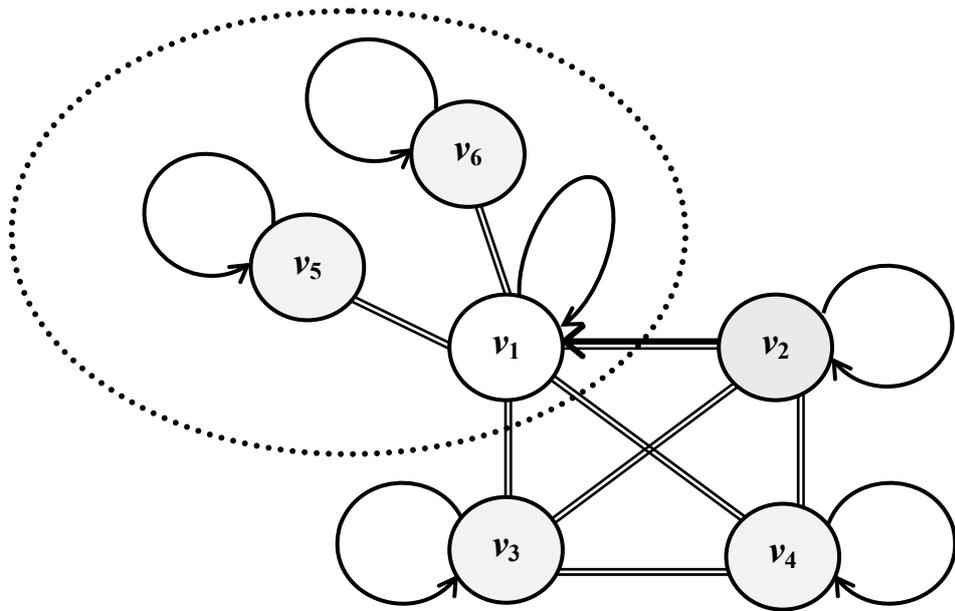


Рис. 2.2. Сеть с компонентой без неположительных путей

Нейтральные вершины v_5 и v_6 соединены с приемником v_1 и не имеют неположительных путей. Протокол работы сети представлен в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Протокол работы сети.

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	0,000	0,000	0,000	0,000	50,000	0,000
1	2,000	0,000	0,000	0,000	48,000	0,000
2	2,250	0,250	0,250	0,250	46,500	0,500
3	2,896	0,438	0,438	0,438	45,063	0,729
4	3,340	0,635	0,635	0,635	43,786	0,967
5	3,777	0,815	0,815	0,815	42,622	1,157
...						
102	8,000	2,666	2,666	2,666	31,001	3,000
103	8,000	2,667	2,667	2,667	31,001	3,000
104	8,000	2,667	2,667	2,667	31,001	3,000
105	8,000	2,667	2,667	2,667	31,000	3,000
106	8,000	2,667	2,667	2,667	31,000	3,000
...						

На рис. 2.3 отражено начало процесса перераспределения ресурса.

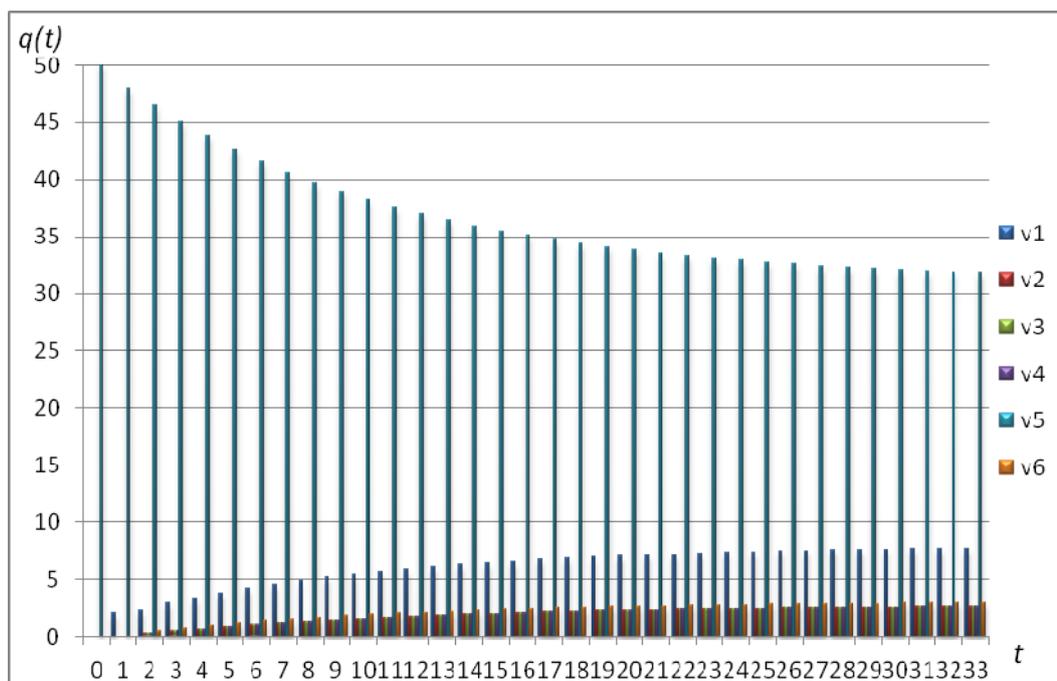


Рис. 2.3. Динамика ресурса в вершинах

Из таблицы 2.2 и рисунка 2.3 видно, что приемник v_1 и нейтральная вершина v_6 , пустые в начальном состоянии, добрали ресурс до своей выходной пропускной способности, а весь излишек ресурса остался в нейтральной вершине v_5 . Нейтральные вершины v_3 и v_4 имеют неположительные пути к источнику, поэтому их ресурс оказался ниже их входной и выходной пропускных способностей, как и ресурс источника v_2 .

Объяснение такого поведения сети заключается в следующем. Выделенная на рисунке компонента (вершины v_1 , v_5 , v_6 вместе с соединяющими их ребрами) образует симметричную подсеть внутри несимметричной. Относительно этой подсети все вершины нейтральны. Вершина v_1 , через которую эта подсеть соединена с остальной сетью, – приемник⁴. Она получает не меньше, чем отдает, и является барьером между двумя компонентами, препятствуя перетеканию ресурса. Таким образом, при больших ресурсах, когда каждая вершина получила некоторое пороговое значение, нейтральная компонента функционирует изолированно от

⁴ Как уже отмечалось в комментарии к свойству 2.2, некоторые условия, налагаемые на вершины, нельзя выразить только в терминах пропускных способностей. Условие того, что вершина является приемником, если сеть обладает более чем одним приемником, не является достаточным. Достаточное условие будет приведено в п. 2.6.

остальной сети, и ее свойства совпадают со свойствами однородной (симметричной) сети. В симметричных (и квазисимметричных) сетях, поскольку все вершины нейтральны, каждая из них способна удержать ресурс выше своей пропускной способности при достаточно большом начальном ресурсе. Для полных однородных сетей это было показано в первой главе, другие виды сетей, обладающих только нейтральными вершинами, будут рассмотрены в главе 4.

2.4. Пороговое значение T

В теореме 2.1 доказаны существование и единственность предельного состояния при условии, что все вершины за конечное число тактов переходят в зону $Z(t)$. Возникает вопрос, можно ли заранее определить по начальному состоянию, перейдут ли все вершины на правило 2 (или, что то же самое, окажутся ли они в зоне $Z(t)$). Если да, то, не производя вычислений, можно будет определить, описывается ли сеть цепью Маркова, и можно ли найти ее предельное состояние по формуле (2.5). Ответ на этот вопрос для несимметричных сетей дает теорема 2.3.

Теорема 2.3. В регулярной несимметричной сети существует пороговое значение суммарного ресурса T , такое, что:

при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t' , переходят в зону $Z(t)$;

при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста, начиная с некоторого t'' .

T единственно и не зависит от начального состояния $Q(0)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.2 следует, что через конечное число тактов все источники и нейтральные вершины с неположительными путями оказываются в зоне $Z(t)$. Тогда при достаточно большом суммарном ресурсе в зоне $Z^+(t)$ могут оказаться лишь приемники и нейтральные вершины без неположительных путей. При $W > r_{sum}$ хотя бы одна из таких вершин гарантированно окажется в $Z^+(t)$.

Рассмотрим вектор предельного состояния как функцию от W : $Q^* = Q^*(W)$. Пусть значение W таково, что все вершины, начиная с некоторого такта, перешли в зону $Z(t)$. Из равенства

$$(2.8) \quad Q^*(W) = Q^{1*} \cdot W$$

следует, что координаты $Q^*(W)$ растут пропорционально W , пока все вершины остаются в зоне $Z(t)$. Как только при увеличении W ресурс в одной из вершин достигает значения r_i^{out} , эта вершина переходит на правило 1 и при дальнейшем росте W соотношение (2.8) перестает выполняться. Обозначим величину суммарного ресурса, при котором первая из вершин в предельном состоянии получает ресурс, равный r_i^{out} , через T . Поскольку $Q^*(W)$ единственно для каждого $W \leq T$ и не зависит от $Q(0)$, то T – единственно. \square

З а м е ч а н и е 2.1. Очевидно, что $T \leq r_{sum}$. Для однородных сетей выполняется равенство $T = r_{sum}$ [83]; для несимметричных сетей $T < r_{sum}$. Это следует непосредственно из теоремы 2.2.

З а м е ч а н и е 2.2. Теорема 2.3 позволяет уточнить определение *малого ресурса*. Суммарный ресурс W в сети называется *малым*, если $W \leq T$.

2.5. Коэффициент симметричности сети

Определим еще одну характеристику сети – *коэффициент симметричности*.

Как следует из замечания 2.1, в однородной сети $T = r_{sum}$. В такой сети с пропорциональным увеличением пропускных способностей значение T также возрастает. Однако при увеличении r_{sum} увеличение T происходит далеко не всегда. Рассмотрим следующие примеры.

П р и м е р 2.3. Пусть сеть задана матрицей пропускной способности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 70 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этой сети кортеж ρ , определенный формулой (1.7), имеет вид: $\rho = ((7,104), (105,75), (83,6), (8,10), (6,14))$. Сеть имеет два приемника – это вершины v_2 и v_3 . $r_{sum} = 209$.

Рассчитаем характеристики этой сети.

1. Вектор предельного состояния при $W = 1$ имеет вид: $Q^{1*} = (0.212, 0.284, 0.396, 0.024, 0.084)$.

2. Экспериментально получено, что $T \approx 15.16$.

3. При $W = T$ вектор предельного состояния равен:

$$Q^* = (3.215, 4.312, 6.000, 0.359, 1.273).$$

При увеличении ресурса в предельном состоянии наблюдается рост только третьей компоненты вектора, так при $W = 100$ предельное состояние будет: $Q^* = (3.215, 4.312, 90.841, 0.359, 1.273)$.

Пример 2.4. Сеть задана матрицей пропускной способности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Т.е., две самые большие пропускные способности r_{12} и r_{23} из примера 2.3 уменьшены в 10 раз. Определим те же самые характеристики для полученной сети.

$$\rho = ((7,14), (15,12), (20,6), (8,10), (6,14)).$$

Сеть имеет те же самые два приемника – вершины v_2 и v_3 . $r_{sum} = 56$.

1. Вектор предельного состояния при $W = 1$ имеет вид: $Q^{1*} = (0.212, 0.253, 0.316, 0.091, 0.128)$.

2. $T \approx 19$.

3. При $W = T$ предельное состояние

$$Q^* = (4.034, 4.800, 6.007, 1.724, 2.434).$$

При увеличении ресурса в предельном состоянии рост происходит, как и в предыдущем примере, только в третьей компоненте вектора предельного

состояния. При $W = 100$ предельное состояние будет: $Q^* = (4.034, 4.800, 87.007, 1.724, 2.434)$.

Эти два примера позволяют увидеть, что между суммарной пропускной способностью сети и пороговым значением может быть не только очевидная прямая зависимость: чем больше r_{sum} , тем больше T , – но и обратная зависимость. В первом примере величине $r_{sum} = 209$ соответствовало значение $T \approx 15.16$; во втором примере при уменьшении пропускных способностей двух ребер и, соответственно, уменьшении суммарной пропускной способности до величины $r_{sum} = 56$, пороговое значение увеличилось $T \approx 19$.

Чем более разнятся суммарные входные и выходные пропускные способности вершин сети, тем меньше становится пороговое значение T . В полной однородной сети, как уже было отмечено, $T = r_{sum}$. Чем больше проявляется несимметричность, тем дальше значение T от r_{sum} .

Коэффициентом симметричности сети назовем отношение $\chi = \frac{T}{r_{sum}}$.

Очевидно, что $\chi \in (0, 1]$. Как будет показано в главе 6, левый конец интервала $\chi = 0$ достигается в сетях определенного вида. Чем ближе χ к единице, тем более сеть симметрична.

2.6. Аттракторы и их классификация

2.6.1. Потенциальные аттракторы

Не все приемники в несимметричной сети могут накопить и даже удержать ресурс в процессе функционирования сети. Некоторые из них не могут перейти в зону $Z^+(t)$ при любом сколь угодно большом значении суммарного ресурса W и начальном состоянии $Q(0)$. Рассмотрим пример функционирования сети с двумя приемниками, обладающими различными входными пропускными способностями.

Пример 2.5. Пусть сеть задана матрицей пропускной способности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$W=100$; в начальном состоянии ресурс находится в первом приемнике:
 $Q(0)=(100, 0, 0, 0, 0)$.

Для этой сети кортеж ρ имеет вид: $\rho = ((7,5), (6,5), (5,7), (5,6), (5,5))$, таким образом, сеть имеет два приемника $\{v_1, v_2\}$, два источника $\{v_3, v_4\}$ и одну нейтральную вершину $\{v_5\}$. Поскольку граф полный, то вершин без неположительных путей нет.

Таблица 2.3. Протокол функционирования сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	100,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	96,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	92,995	1,876	1,710	1,710	1,710
...					
31	83,799	4,536	3,888	3,888	3,888
32	83,798	4,536	3,888	3,888	3,888
33	83,797	4,537	3,889	3,889	3,889
34	83,797	4,537	3,889	3,889	3,889
...					

Дальнейшие эксперименты показывают, что любое начальное распределение ресурса $W=100$ приведет к одному и тому же предельному состоянию $Q^* = (83,797, 4,537, 3,889, 3,889, 3,889)$. Таким образом, из двух приемников в сети только один оказался способным в предельном состоянии удержаться в Z^+ , и, более того, аккумулировать весь ресурс, превышающий T . (Непосредственно из вектора предельного состояния можно найти величину T : $T \approx 5 + 4,537 + 3,889 + 3,889 + 3,889 = 21,204$.)

Рассмотрим несколько примеров работы сети с двумя одинаковыми приемниками.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \rho = ((7,5), (7,5), (5,7), (5,7), (5,5)).$$

Пример 2.6. Ресурс в первом приемнике: $Q(0) = (30, 0, 0, 0, 0)$.

Таблица 2.4. Протокол функционирования сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	30,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	26,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	22,900	1,900	1,733	1,733	1,733
3	20,493	2,593	2,304	2,304	2,304
4	18,625	3,132	2,748	2,748	2,748
...					
29	12,144	5,000	4,285	4,285	4,285
30	12,143	5,000	4,286	4,286	4,286
31	12,143	5,000	4,286	4,286	4,286
...					

Из примера видно, что первый приемник оставил себе большую часть ресурса, второй взял лишь количество, равное r_2^{out} , все остальные вершины получили ресурс, меньший r_i^{in} (что и утверждается в теореме 2.2). $Q^* = (32,143, 5,000, 4,286, 4,286, 4,286)$.

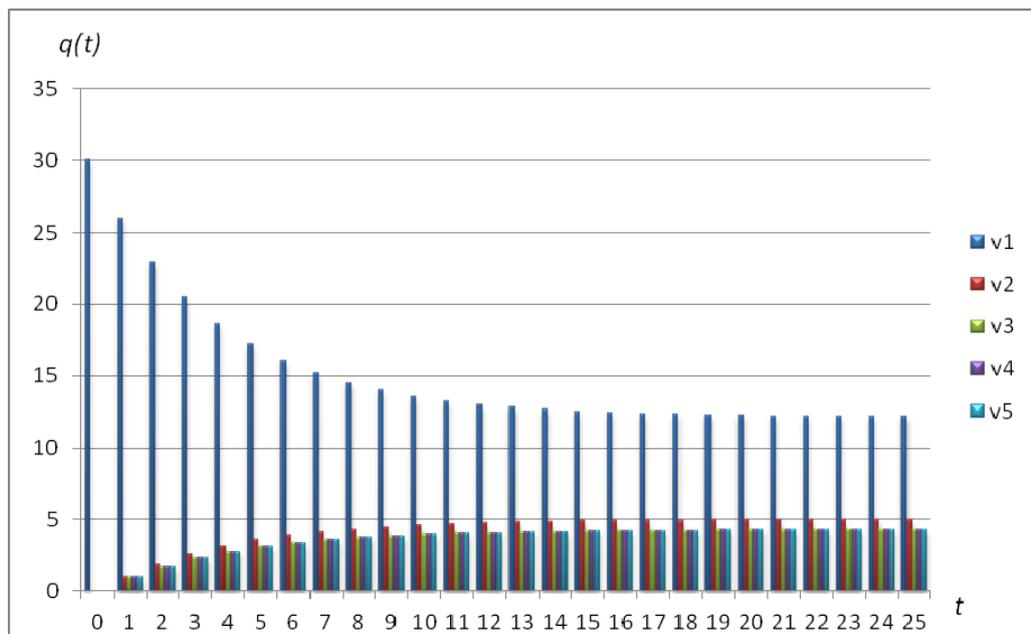


Рис. 2.4. Функционирование сети с двумя равными приемниками (ресурс в первом приемнике)

Если перенести ресурс из первого приемника во второй, то в силу их симметричности ресурс распределится аналогично: за такое же количество шагов при той же точности получится симметричный результат: $Q^* = (5,000, 12,143, 4,286, 4,286, 4,286)$.

В той же сети поместим ресурс в один из источников.

Пример 2.7. Ресурс в первом источнике (вершина v_3): $Q(0) = (0, 0, 30, 0, 0)$.

Для такого начального состояния предельное состояние описывается вектором $Q^* = (9,291, 7,852, 4,286, 4,286, 4,286)$. Таким образом, оба источника оказались в зоне Z^{+*} , но поскольку первый источник связан ребром с большей пропускной способностью с первым приемником, первый приемник имеет ресурс выше, чем второй.

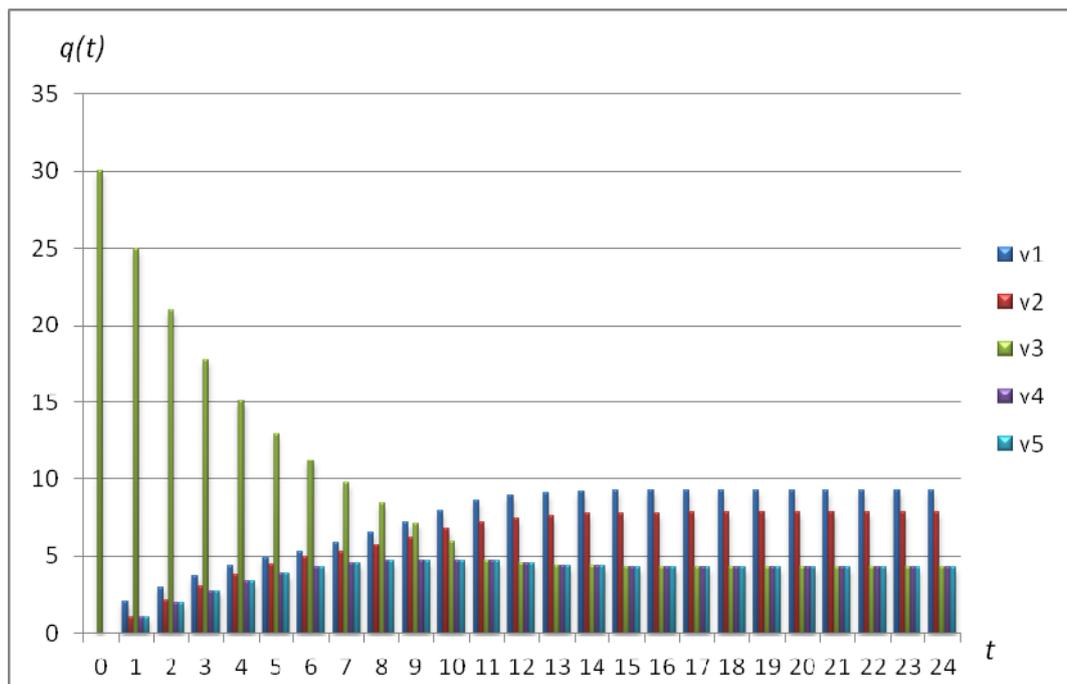


Рис. 2.5. Функционирование сети с двумя равными приемниками (ресурс в первом источнике (вершина v_3))

При помещении ресурса во второй источник (вершина v_4), получим симметричное распределение: $Q^* = (7,852, 9,291, 4,286, 4,286, 4,286)$.

Если в той же сети поместить ресурс в нейтральную вершину, оба приемника получают поровну: $Q^* = (8,571, 8,571, 4,286, 4,286, 4,286)$.

На рис. 2.6 представлена гистограмма, отражающая динамику ресурса при начальном состоянии $Q(0)=(0, 0, 0, 0, 30)$. Ресурсы в двух приемниках растут одинаково, так же, как и в двух источниках. Нейтральная вершина постепенно отдает излишки ресурса, и ресурсы в вершинах v_3, v_4, v_5 выравниваются.

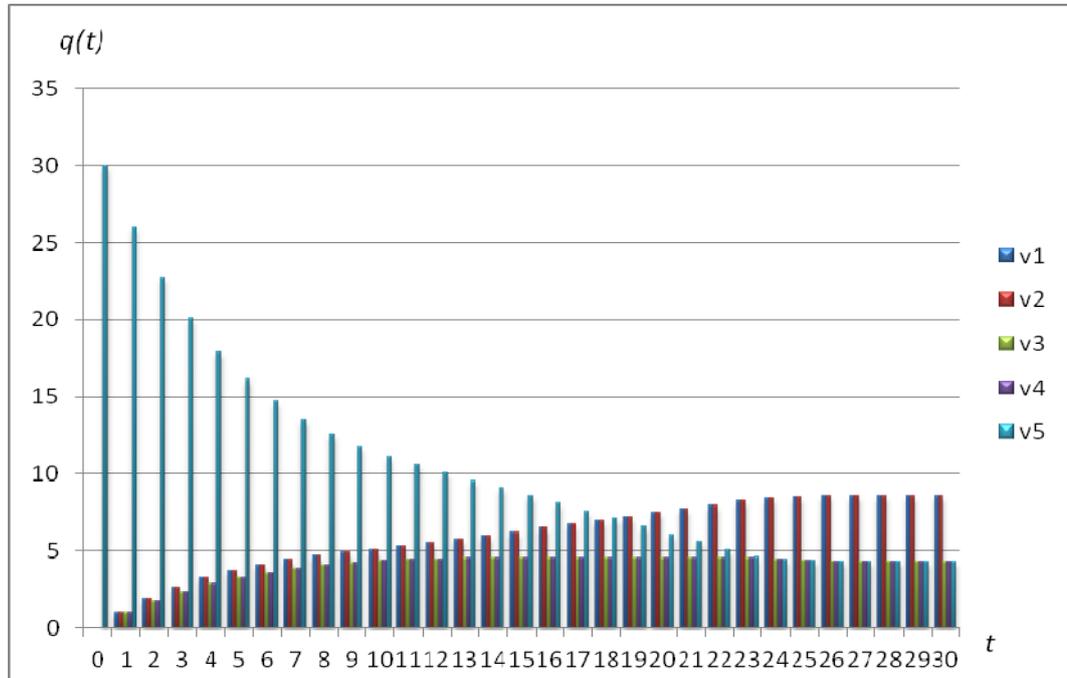


Рис. 2.6. Функционирование сети с двумя равными приемниками (ресурс в нейтральной вершине v_5)

Из примеров видно, что величина ресурса приемников в предельном состоянии зависит от начального состояния (заметим, кроме того, что три последние координаты остаются неизменными для любого начального состояния). Сеть с двумя равными приемниками имеет некоторое сечение (рис. 2.7), такое, что приемники находятся по разные его стороны, и суммарные входные пропускные способности вершин по обе стороны от этого сечения равны.

Приемник, по чью сторону от сечения находится больше ресурса в начальном состоянии, в предельном состоянии получит больше. Если ресурс разделен симметрично относительно сечения, приемники получают поровну. В предельных случаях, когда весь ресурс находится в одном из приемников, другой может получить лишь ресурс, равный своей суммарной выходной

пропускной способности. Ресурс в этом приемнике стремится к его выходной пропускной способности снизу, т.е. этот приемник не переходит в зону $Z^+(t)$ ни при каком t .

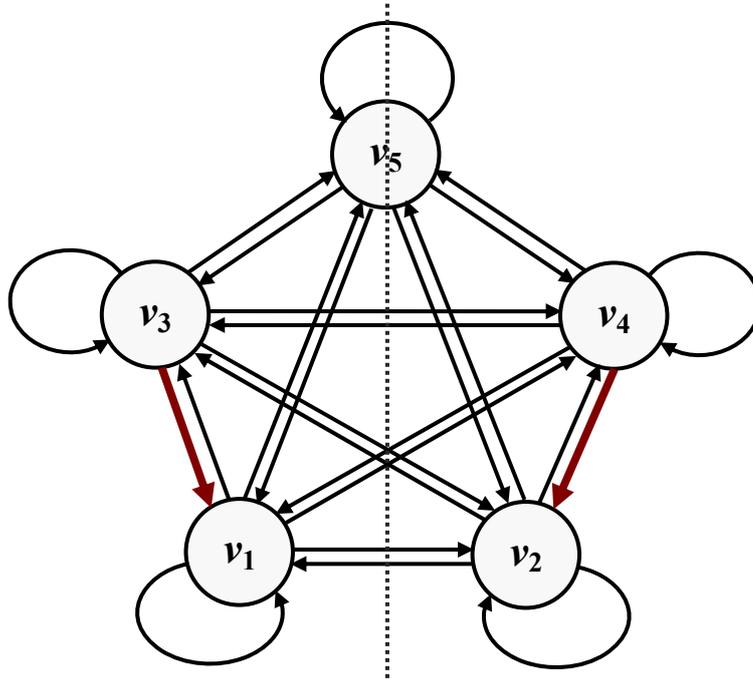


Рис. 2.7. Сечение сети, относительно которого приёмники симметричны

Вершины, в предельном состоянии принадлежащие Z^{+*} , будем называть *аттракторами*. Вершины, для которых существует начальное состояние $Q(0)$ из которого они переходят в зону Z^{+*} , назовем *потенциальными аттракторами*. Из примера 2.2 видно, что потенциальным аттрактором в сети может быть не только приемник, но и нейтральная вершина, не имеющая неположительных путей.

После введения определения аттрактора, необходимо уточнить определение неположительного пути.

Путь от нейтральной вершины к источнику, не содержащий вершин-аттракторов, назовем *неположительным путем*.

Теорема 2.2. теперь может быть обобщена.

Теорема 2.2'. В регулярной несимметричной сети для всех вершин не-аттракторов для любого суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ существует такой момент времени t' , что для любого $t > t'$ выполнится неравенство:

$$(2.6') \quad q_i(t) < r_i^{in}.$$

Доказательство при этом остается полностью неизменным.

2.6.2. Классификация аттракторов

Как видно из примера 2.5, не всякий приемник может стать аттрактором. С другой стороны, аттракторами могут быть и нейтральные вершины.

Однако между аттракторами-приемниками и аттракторами – нейтральными вершинами есть принципиальное различие. Вершина-приемник стягивает на себя ресурс, циркулирующий в сети. При большом ресурсе она способна перейти в зону $Z^+(t)$, находясь в начальном состоянии в зоне $Z(t)$. Нейтральная вершина способна лишь *остаться* в зоне $Z^+(t)$, находясь в ней в начальном состоянии. Перейти туда из зоны $Z(t)$ она не может.

Таким образом, аттракторы в сети делятся на два непересекающихся класса:

- *активные аттракторы* – это вершины-приемники;
- *пассивные аттракторы* – нейтральные вершины без неположительных путей.

2.6.3. Признаки аттрактивности вершины

Узнать, какая из вершин в несимметричной сети является аттрактором, только по виду матрицы пропускных способностей (и по кортежу ρ) невозможно. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.8. Сеть с пятью вершинами представлена матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 100 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кортеж ρ для нее имеет вид: $\rho = ((104, 6), (6, 5), (5, 104), (5, 5), (5, 5))$.

В качестве начального состояния возьмем вектор $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 100)$.

Ресурс $W = 100$ помещен в нейтральную вершину. Протокол распределения ресурса представлен в таблице 2.5.

Таблица 2.5. Протокол функционирования сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0.000	0.000	0.000	0.000	100.000
1	1.000	1.000	1.000	1.000	96.000
2	2.528	1.743	1.576	1.576	92.576
3	3.601	2.522	2.100	2.100	89.677
4	4.544	3.145	2.545	2.545	87.221
5	5.342	3.677	2.920	2.920	85.141
6	6.017	4.128	3.238	3.238	83.379
7	6.604	4.504	3.504	3.504	81.883
8	7.575	4.635	3.635	3.635	80.519
9	8.725	4.689	3.689	3.689	79.208
10	9.948	4.711	3.711	3.711	77.919
...					
76	86.647	4.088	3.088	3.088	3.088
77	86.669	4.083	3.083	3.083	3.083
78	86.683	4.079	3.079	3.079	3.079
79	86.691	4.077	3.077	3.077	3.077
80	86.696	4.076	3.076	3.076	3.076
81	86.704	4.075	3.075	3.075	3.075
82	86.704	4.075	3.075	3.075	3.075
...					

Как видно из протокола, вершины v_2, \dots, v_5 получили некоторый ресурс, меньший своей входной и выходной способности, а весь остальной ресурс аккумулировался в вершине v_1 , которая и является потенциальным аттрактором.

Предельное состояние $Q^* = (86,704, 4,075, 3,075, 3,075, 3,075)$.

Заметим, что в сети два приемника. Это вершина v_1 и вершина v_2 . Однако входная пропускная способность вершины v_1 сильно превышает

входную пропускную способность вершины v_2 , и то, что аттрактором оказалась вершина v_1 , соответствует ожиданиям.

Функционирование сети на рис. 2.8 представлено в виде графика, так как процесс сходится за относительно большое количество тактов и гистограмма утрачивает информативность.

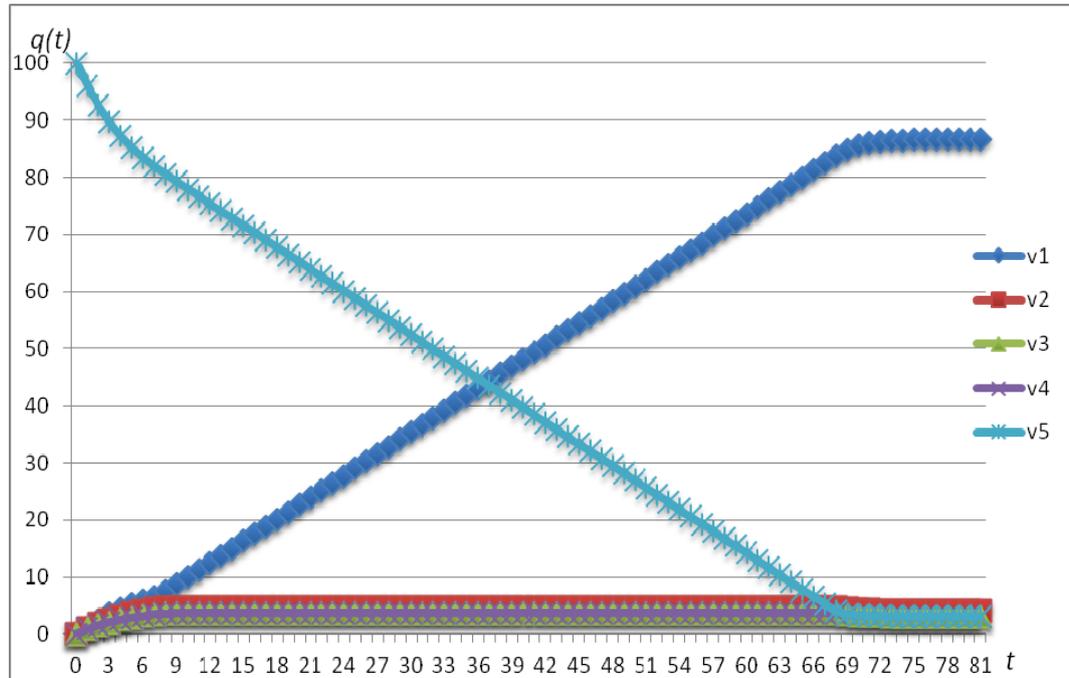


Рис. 2.8. Функционирование сети с двумя неравными приемниками (ресурс в нейтральной вершине v_5)

Из рисунка видно, что на протяжении функционирования происходит обмен ресурсом между вершинами v_5 и v_1 , в то время как в остальных вершинах наблюдается стабилизация.

Изменим в матрице R единственный элемент: пусть теперь $r_{12} = 3$.

Пример 2.9. Сеть с пятью вершинами представлена матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 100 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кортеж ρ для нее имеет вид: $\rho = ((104, 7), (7, 5), (5, 104), (5, 5), (5, 5))$. Начальное состояние оставим неизменным: $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 100)$. Протокол распределения ресурса представлен в таблице 3.7.

Таблица 2.6. Протокол функционирования сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0.000	0.000	0.000	0.000	100.000
1	1.000	1.000	1.000	1.000	96.000
2	2.504	1.838	1.552	1.552	92.552
3	3.529	2.766	2.051	2.051	89.603
4	4.439	3.495	2.487	2.487	87.091
5	5.222	4.123	2.855	2.855	84.945
6	5.886	4.661	3.169	3.169	83.114
7	6.454	5.119	3.437	3.437	81.552
8	6.915	5.606	3.643	3.643	80.194
9	7.219	6.333	3.751	3.751	78.946
10	7.576	7.119	3.786	3.786	77.732
...					
158	6.268	84.100	3.211	3.211	3.211
159	6.267	84.101	3.211	3.211	3.211
160	6.267	84.103	3.210	3.210	3.210
161	6.266	84.104	3.210	3.210	3.210
162	6.266	84.104	3.210	3.210	3.210
...					

Предельное состояние $Q^* = (6,266, 84,104, 3,210, 3,210, 3,210)$.

Как видно, вершины v_1 и v_2 поменялись местами. Теперь аттрактором стала вершина v_2 , а v_1 имеет в предельном состоянии ресурс, меньший своей выходной способности. Это случилось потому, что ребро (v_1, v_2) , имеющее пропускную способность, равную 3, позволило вершине v_2 «паразитировать» на v_1 , и получать излишки ресурса не напрямую из v_5 , а через посредничество приемника v_1 . Когда пропускная способность r_{12} была равна 2, ее было недостаточно для «перекачки» ресурса, и он накапливался в вершине v_1 .

Из рис. 2.9 хорошо видно, что вершина v_1 сначала тоже переходит в зону $Z^+(t)$, но затем теряет накопленный ресурс.

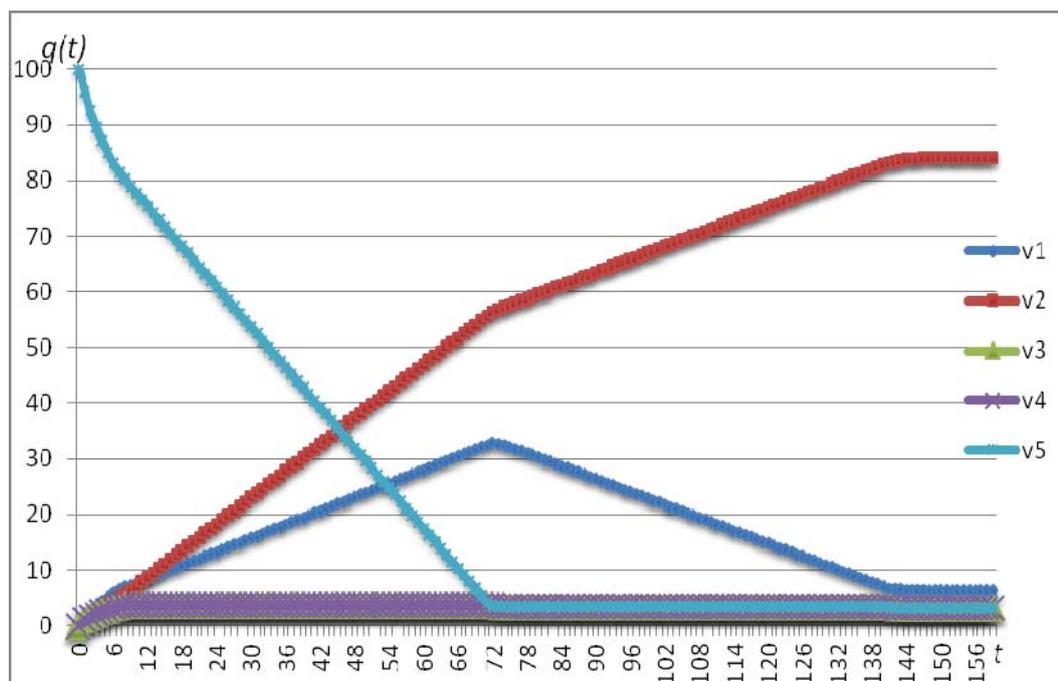


Рис. 2.9. Функционирование сети с двумя неравными приемниками (ресурс в нейтральной вершине v_5)

Возникает естественный вопрос, существует ли некоторое значение пропускной способности r_{12} , при котором оба приемника стали бы потенциальными аттракторами, как это было в примерах 2.6, 2.7.

Однако главная задача заключается в нахождении критерия аттрактивности. Сформулировать ее можно следующим образом: можно ли априорно, не рассчитывая предельное состояние, узнать, какие из вершин являются потенциальными аттракторами. Можно ли найти необходимые и достаточные условия аттрактивности вершины.

Кроме того, во всех рассмотренных примерах предельное состояние существует, и определения аттракторов даны в предположении, что процесс функционирования несимметричной регулярной сети при большом суммарном ресурсе всегда сходится.

Исследованию поведения несимметричных регулярных сетей, в том числе, доказательству существования предельного состояния при больших ресурсах, определению критерия аттрактивности и нахождению условия существования нескольких аттракторов посвящена глава 3.

Выводы

1. Регулярные сети исследованы на сходимость при малом ресурсе. Ресурс считается «малым», если, начиная с некоторого конечного момента t' , все вершины функционируют по правилу 2.

2. Показано, что при малых ресурсах поведение всех подклассов регулярных сетей описывается регулярной цепью Маркова. Непосредственно из этого следует, что предельное состояние в таких сетях с малым ресурсом существует, единственно, и является левым собственным вектором стохастической матрицы R' , соответствующей матрице пропускной способности R , с максимальным собственным числом $\lambda = 1$ кратности 1. Кроме этого, вектор предельного состояния является собственным вектором матрицы предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова R'^{∞} . Сама эта матрица состоит из n векторов предельного состояния при $W = 1$: $R'^{\infty} = \mathbf{1}Q^{1*}$.

3. Матрица R'^{∞} является собственным проектором лапласовской матрицы $L = E - R'$ и с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов орграфа, полученного из исходного орграфа сети изменением ориентации ребер.

4. Рассмотрены свойства несимметричных регулярных ресурсных сетей и особенности их функционирования.

5. Доказано, что все вершины-источники и нейтральные вершины без неположительных путей за конечное число тактов переходят в зону $Z(t)$.

6. Введено понятие порогового значения ресурса T , в правой полуокрестности которого хотя бы одна вершина изменяет правило функционирования, и процесс распределения ресурса перестает описываться однородной цепью Маркова. Доказана единственность T для каждой регулярной сети.

7. Введена характеристика сети, названная коэффициентом несимметричности. Этот показатель, изменяющийся на полуинтервале $(0, 1]$,

тем ближе к единице, чем меньше различаются суммарная входная и выходная пропускная способности всех вершин сети.

8. Введено понятие потенциального аттрактора; произведена классификация аттракторов. Показано, что не каждый приемник может быть потенциальным аттрактором.

9. Показано, что данных о пропускных способностях недостаточно для определения является ли данный приемник аттрактором.

ГЛАВА 3. ПОТОКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЯХ

3.1. Поток ресурса

При больших ресурсах, т.е. при $W > T$, для доказательства сходимости в общем случае недостаточно рассмотрения последовательности векторов состояний сети, как это было сделано при малых ресурсах, – система перестает описываться однородной цепью Маркова. Так как количество ресурса превышает пороговое значение T , в сети появляются вершины, функционирующие по разным правилам. При этом вершины, функционирующие по правилу 1, отдают на каждом такте постоянное количество ресурса, ресурс, исходящий из остальных вершин, изменяется. Для исследования поведения сетей при больших ресурсах необходимы дополнительные характеристики.

3.1.1. Поток при $W \leq T$

Если $W \leq T$, вся сеть при достаточно больших t ($t > t'$) функционирует по правилу 2, и ресурс в вершинах состоит только из вновь пришедшего, т.е. входного потока: $Q(t) = F^{in}(t)$.

С другой стороны, по правилу 2 вершины отдают весь свой ресурс, значит, на этом же такте t выходной поток совпадет с вектором состояния: $F^{out}(t) = Q(t)$. Из теорем 2.1 и 2.3 предел $Q(t)$ при $W \leq T$ существует и равен Q^* . Тогда пределы: $\lim_{t \rightarrow \infty} F^{in}(t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} F^{out}(t)$ тоже существуют. Таким образом, при функционировании сети по правилу 2 выполняется:

$$F^{in*} = F^{out*} = Q^*.$$

$$f_{sum}^* = W.$$

Вектор предельного состояния для $W = T$ обозначим через $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$, потоки через \tilde{F}^{in} и \tilde{F}^{out} . Тогда:

$$\tilde{F}^{in} = \tilde{F}^{out} = \tilde{Q};$$

$$\tilde{f}_{sum} = T.$$

3.1.2. Поток при $W > T$

Рассмотрим функционирование сети при $W > T$. В зависимости от начального состояния поток в сети может изменяться как монотонно, так и немонотонно. Приведенные ниже рисунки иллюстрируют различное изменение потока для одной и той же матрицы пропускных способностей R из примера 2.5 (глава 2) в зависимости от начального состояния.

Пример 3.1.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы $T \approx 21,204$.

Рассмотрим динамику суммарного потока сети для $Q(0) = (100, 0, 0, 0, 0)$ (рис. 3.1). Он монотонно возрастает. (Поток считается, как сумма входных потоков, поэтому график начинается с первого такта, а не с нулевого).

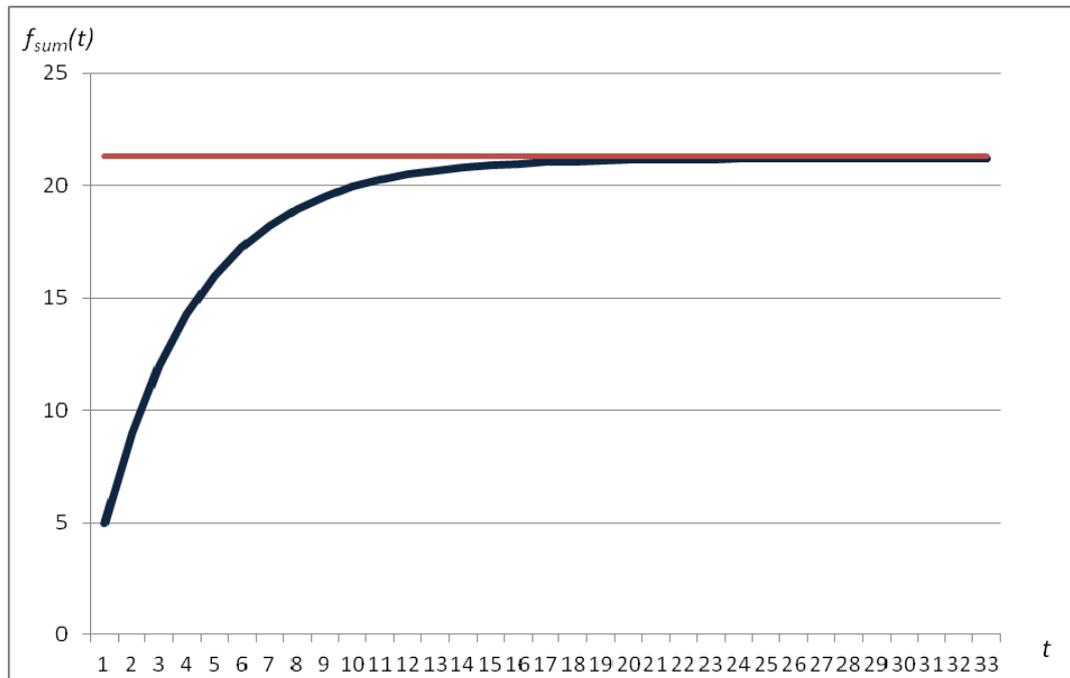


Рис. 3.1. Динамика суммарного потока в сети. Начальное состояние

$$Q(0) = (100, 0, 0, 0, 0)$$

Красной линией обозначена асимптота – предельная величина потока.

Если переместить ресурс в любую другую вершину, поток начнет изменяться немонотонно. Так, при начальном состоянии $Q(0) = (0, 100, 0, 0, 0)$ поток будет возрастать, затем следует фаза стабилизации, после которой поток уменьшается и продолжает убывать, стремясь к предельному значению сверху (рис. 3.2).

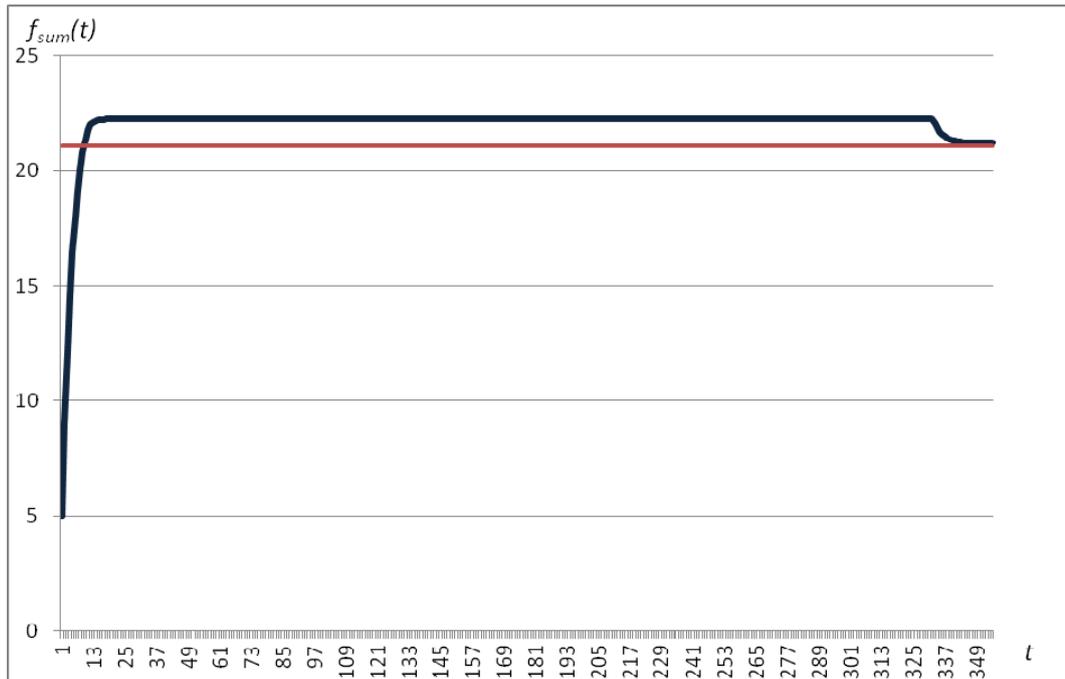


Рис. 3.2. Динамика суммарного потока в сети. Начальное состояние $Q(0)=(0, 100, 0, 0, 0)$

Длинное плато соответствует процессу перераспределения ресурса между первой и второй вершиной. В это время и вершина v_1 и вершина v_2 функционируют по правилу 1. Резкое уменьшение потока происходит в момент перехода вершины v_2 с правила 1 на правило 2. После чего наступает окончательная стабилизация потока.

Если ресурс поместить в вершину v_3 , поведение сети будет еще сложнее – у потока окажется две зоны стабилизации (рис. 3.3).

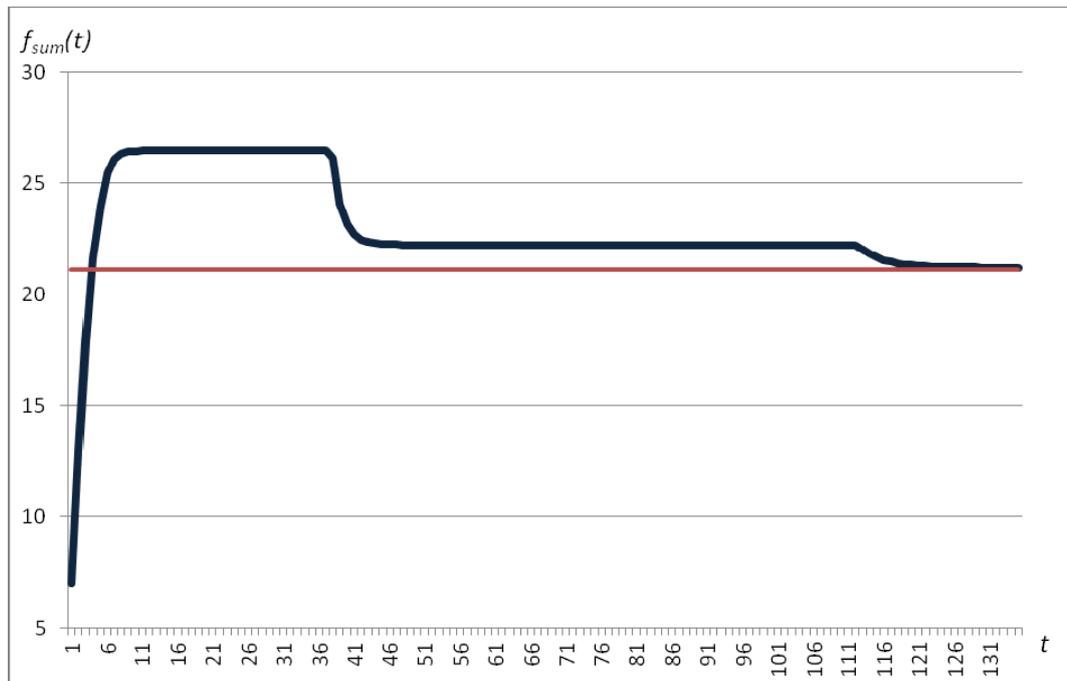


Рис. 3.3. Динамика суммарного потока в сети. Начальное состояние $Q(0)=(0, 0, 100, 0, 0)$. (Ось Ox сдвинута на 5 единиц вверх)

Рассмотрим невозрастающий поток для той же сети. В начальном состоянии каждая вершина имеет ресурс, больший ее выходной пропускной способности.

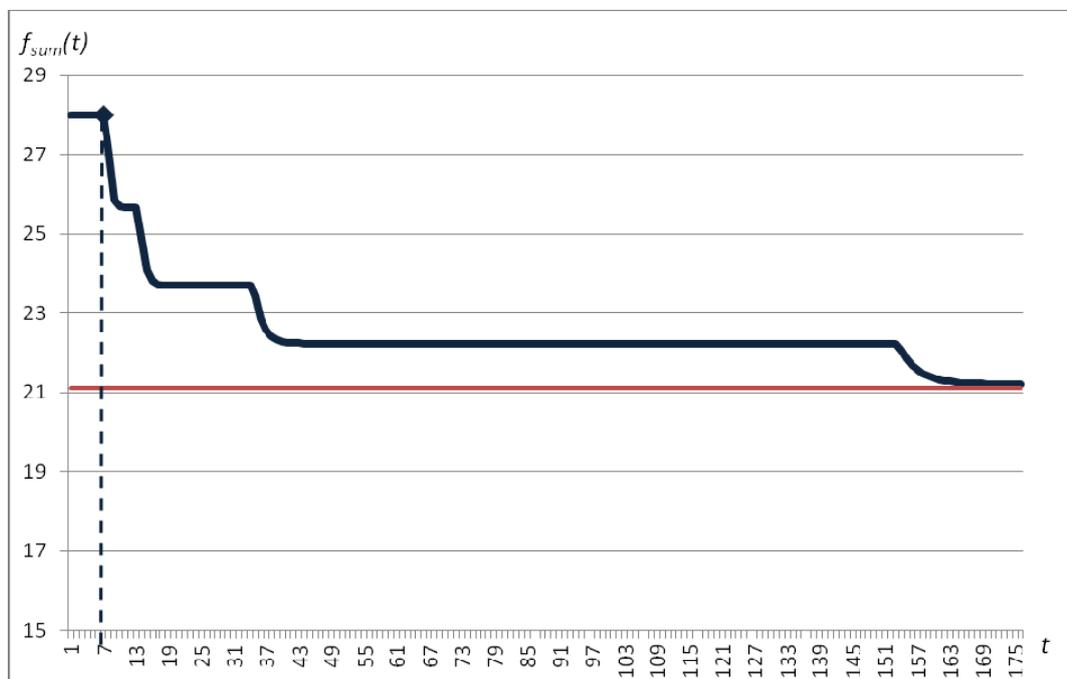


Рис. 3.4. Динамика потока в сети. Начальное состояние $Q(0) = (20, 20, 20, 20, 20)$. (Ось Ox сдвинута на 15 единиц вверх)

Первые семь тактов поток равен пропускной способности сети r_{sum} , затем он начинает убывать, проходя еще три промежуточных зоны стабилизации. Первая стабилизация ($f_{sum} = r_{sum}$) соответствует периоду, когда каждая вершина функционирует по правилу 1. Начиная с восьмого такта, вершина v_3 , отдавая больше остальных, первая переходит на правило 2, и поток уменьшается. Самое длинное плато соответствует периоду, когда ресурс вершин v_3, v_4, v_5 стабилизировался, и перераспределение происходит только между двумя приемниками: первый забирает излишки ресурса у второго.

Потоки в каждой вершине представлены на рис. 3.5.

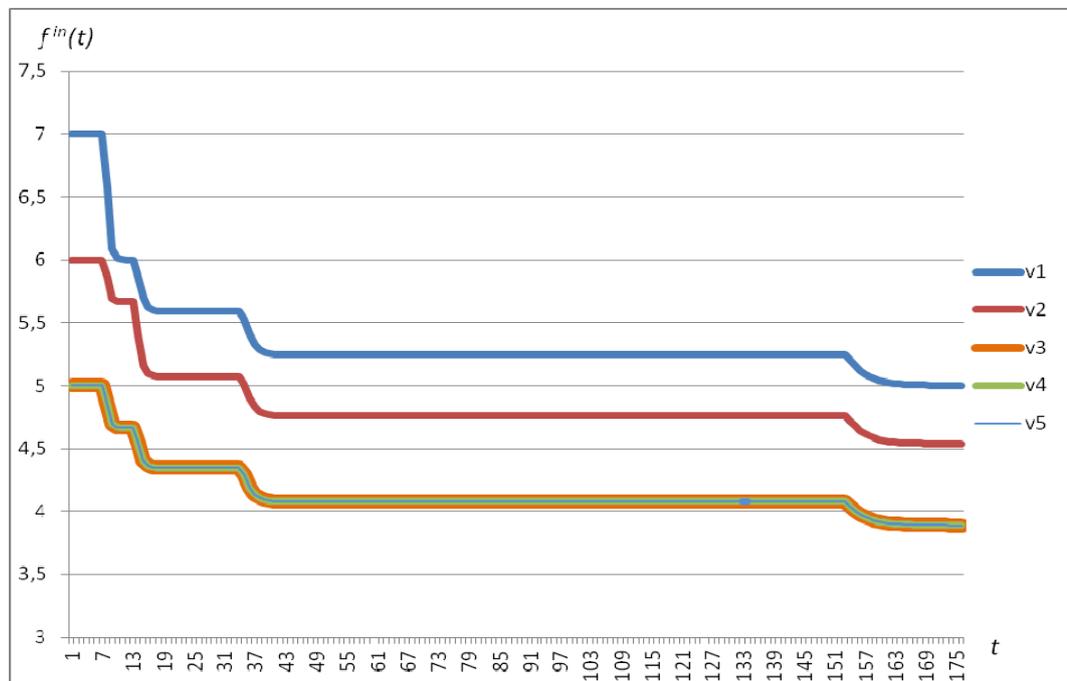


Рис. 3.5. Динамика входного потока в вершинах сети. Начальное состояние $Q(0)=(20, 20, 20, 20, 20)$. (Ось Ox сдвинута на 3 единицы вверх)

Изменение ресурса в вершинах соответствующее потокам на рис. 3.4, 3.5, представлено на рисунке 3.6.

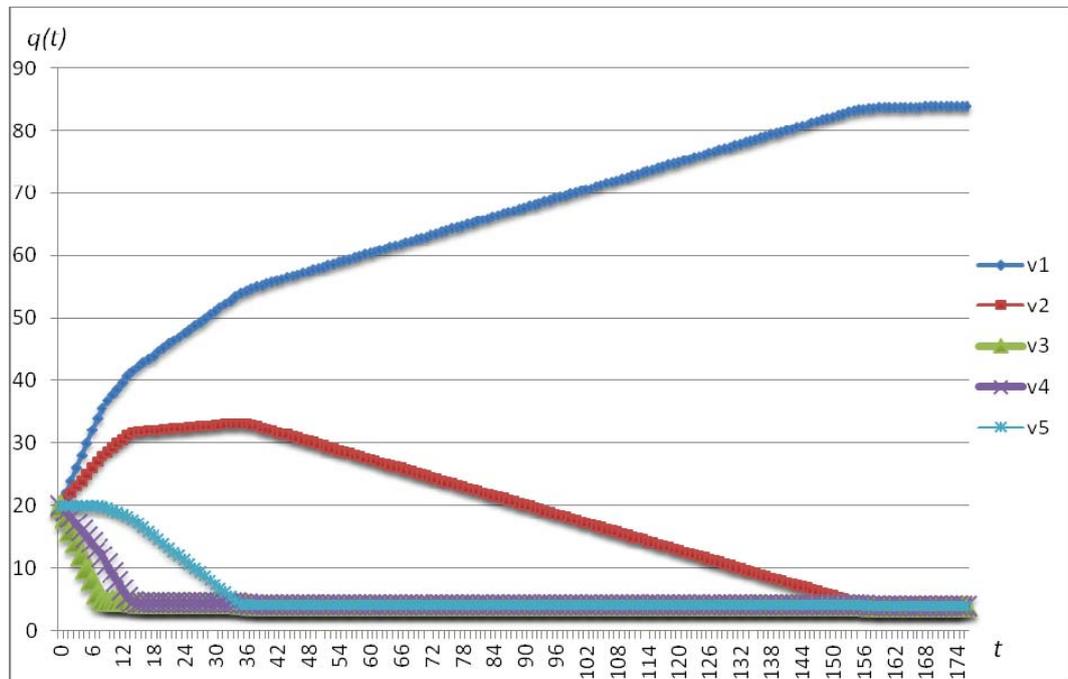


Рис. 3.6. Динамика ресурса в вершинах. Начальное состояние $Q(0)=(20, 20, 20, 20, 20)$

Векторы предельного потока в вершинах равны:

$$F^{in*} = F^{out*} = (5, 4,537, 3,889, 3,889, 3,889), \quad \text{а суммарный поток } \tilde{f}_{sum} = 21.204.$$

Рассмотренные примеры показывают, что поведение потока зависит от начального состояния и может сильно различаться. Однако некоторые закономерности очевидны.

1. Если поток возрастает, то только с начальной фазы. Переход с убывания на возрастание невозможен.
2. При функционировании сети возможна промежуточная стабилизация потока.
3. Поток уменьшается всякий раз, когда очередная вершина не-аттрактор переходит в зону $Z(t)$.
4. При $t \rightarrow \infty$ поток стремится к предельному состоянию.
5. Предельный поток во всех примерах одинаков, причем $\tilde{f}_{sum} = T$.

Протоколы работы сети показывают, что в первой вершине, являющейся аттрактором, выходной поток стремится к выходной пропускной способности: $f_1^{out*} \rightarrow 5 = r_1^{out}$ (см. рис. 3.5).

Из доказательства теоремы 2.3 о существовании порогового значения T следует, что при $W = T$ хотя бы одна вершина будет иметь ресурс, равный своей выходной пропускной способности: $\tilde{q}_i = r_i^{out}$. Пусть, как и прежде, $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$ – вектор предельного состояния для $W = T$. Введем в сети такую нумерацию вершин, при которой $\tilde{q}_i = r_i^{out}$ выполняется для первых l вершин ($l \geq 1$). Тогда: $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)$.

Теорема 3.1. В регулярной несимметричной сети для $W > T$ и любого начального состояния предельный поток существует, причем существует такая нумерация вершин, что матрица предельного потока F^* имеет вид:

$$F^* = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{ln} \\ \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,1} & \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,2} & \dots & \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{n1} & \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{n2} & \dots & \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{nn} \end{pmatrix},$$

где первые l вершин имеют при $W = T$ ресурс, равный своей выходной пропускной способности.

Доказательство. Из теорем 2.1 и 2.3 следует, что при $W = T$ предельное состояние существует. Тогда существует и предельный поток, и матрица потока при $W = T$ в предельном состоянии будет следующей:

$$(3.1) \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{ln} \\ \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,1} & \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,2} & \dots & \frac{\tilde{q}_{l+1}}{r_{l+1}^{out}} r_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{n1} & \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{n2} & \dots & \frac{\tilde{q}_n}{r_n^{out}} r_{n2} \end{pmatrix}$$

Поскольку у каждой вершины в предельном состоянии входной поток равен выходному, для каждого i сумма i -й строки матрицы (3.1) равна сумме i -го столбца. Вектор-столбец выходного потока равен:

$$(3.2) \quad \tilde{F}^{out} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)^T$$

Пусть ресурс $W > T$ в начальный момент времени имеет распределение $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$. Введем коэффициент пропорциональности:

$$\alpha = \frac{T}{W} < 1,$$

и рассмотрим вектор начального состояния $Q_T(0) = (\alpha q_1(0), \alpha q_2(0), \dots, \alpha q_n(0))$ для суммарного ресурса $W = T$. Для такого начального состояния предельное состояние существует и единственно. Предельный поток описывается матрицей \tilde{F} , определенной в (3.1). Векторы входного и выходного потоков совпадают с вектором предельного состояния (3.2):

$$\tilde{F}^{in} = (\tilde{F}^{out})^T = \tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)$$

По построению вектора $Q_T(0)$ поток $F_T(t)$ на каждом такте не может превосходить поток $F(t)$ для $Q(0)$ ($W > T$):

$$(3.3) \quad F(t) \geq F_T(t).$$

Докажем, что в (3.3) при $t \rightarrow \infty$ достигается равенство, и предельные потоки при $W > T$ и при $W = T$ совпадают.

Для первых l вершин доказательство очевидно: поток максимален – он равен суммарной выходной пропускной способности этих вершин.

Предположим, что при $t \rightarrow \infty$ и $W > T$ выходной поток вершины v_i ($i > l$) больше \tilde{q}_i на величину $\Delta f(t)$. Тогда матрица потока будет иметь вид:

$$F(t) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{ln} \\ f_{l+1,1}(t) & f_{l+1,2}(t) & \dots & f_{l+1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{i1} & \left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{i2} & \dots & \left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Поскольку сеть связна и регулярна, в строке с номером i найдется по крайней мере один элемент, не равный нулю (помимо диагонального).

Если среди ненулевых элементов i -й строки есть элемент с номером $k \leq l$, рассмотрим входной и выходной потоки вершины v_k . Суммарный выходной ее поток равен r_k^{out} , а входной поток строго больше, так как эта

вершина получает из вершины v_i ресурс $\left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{ik}$, больший, чем при

$W = T$, а из остальных – не меньший. Таким образом, вершина v_k получает больше ресурса, чем отдает, и в ней происходит накопление. Величина приращения ресурса в ней не менее чем $\Delta f(t) \cdot r_{ik}$. Если это значение ограничено снизу, накопление в вершине v_k будет происходить бесконечно, что противоречит конечности ресурса W . Поэтому, $\Delta f(t) \cdot r_{ik} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а следовательно и $\Delta f(t) \rightarrow 0$, и все элементы i -й строки матрицы $F(t)$ стремятся к соответствующим элементам матрицы \tilde{F} . Таким образом, если вершина v_i имеет исходящее ребро хотя бы в одну из l первых вершин, ее суммарный выходной поток при $t \rightarrow \infty$ не сможет превысить поток при $W = T$, т.е. величину \tilde{q}_i .

Пусть вершина v_i не имеет исходящих ребер ни в одну из l первых вершин. Тогда i -я строка матрицы потока имеет l первых нулей.

$$F(t) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1l} & r_{1,l+1} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{ll} & r_{l,l+1} & \dots & r_{ln} \\ f_{l+1,1}(t) & f_{l+1,2}(t) & \dots & f_{l+1,l}(t) & f_{l+1,l+1}(t) & \dots & f_{l+1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{i,l+1} & \dots & \left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nl}(t) & f_{n,l+1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Пусть $r_{im} > 0$, $m > l$. Рассмотрим вершину v_m . Ее входной поток строго больше, чем при $W = T$, так как поток в ребре (v_i, v_m) :

$$\left(\frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} + \Delta f(t) \right) r_{im} > \frac{\tilde{q}_i}{r_i^{out}} r_{im}.$$

Поскольку $m > l$, вершина v_m при $W = T$ в

предельном состоянии имеет ресурс, меньший своей выходной пропускной способности, и функционирует по правилу 2, т.е. отдает весь приходящий к ней ресурс, а это означает, что ее выходной поток также увеличится. Если вершина v_m имеет исходящее ребро хотя бы в одну вершину v_k ($k \leq l$), применяя предыдущие рассуждения, легко показать, что v_k будет получать из нее больше, чем отдавать, до тех пор, пока ее ресурс и, соответственно, выходной поток, не достигнет величины \tilde{q}_m . Ресурс (и поток) вершины v_i в этом случае будет стремиться сверху к величине \tilde{q}_i .

Поскольку сеть регулярна, ее граф сильно связан, поэтому из вершины v_i всегда существует путь до вершины v_k ($k \leq l$). Если этот путь длиннее, чем 2, и равен J , применим аналогичные рассуждения $J - 1$ раз. Получим, что потоки из всех вершин, принадлежащих этому пути, при $t \rightarrow \infty$ не могут

превысить потоков при $W = T$: $\tilde{q}_{i_1}, \tilde{q}_{i_2}, \dots, \tilde{q}_{i_J}$. С другой стороны, поскольку $W > T$, потоки ограничены этими величинами снизу. Таким образом, доказаны все утверждения теоремы. Матрица предельного потока при любом значении ресурса $W > T$ и его начальном распределении совпадает с матрицей предельного потока при $W = T$. \square

Непосредственно из теоремы 3.1 и ее доказательства следует справедливость ряда важных утверждений.

С л е д с т в и е 3.1. В регулярной несимметричной сети при любой величине и начальном распределении ресурса $W > T$ предельное состояние существует.

С л е д с т в и е 3.2. В регулярной несимметричной сети при любой величине и начальном распределении ресурса $W > T$ величина суммарного предельного потока равна пороговому значению T : $f_{sum}^ = T$.*

С л е д с т в и е 3.3. В регулярной несимметричной сети для любого $W > T$ вектор предельного потока совпадает с вектором предельного состояния при $W = T$: $F^{in} = (F^{out*})^T = \tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)$.*

С л е д с т в и е 3.4. В регулярной несимметричной сети вершина является потенциальным аттрактором тогда и только тогда, когда в предельном состоянии при $W = T$ она имеет ресурс, равный своей выходной пропускной способности: $\tilde{q}_k = r_k^{out}$.

С л е д с т в и е 3.5. В регулярной несимметричной сети вершины, имеющие при $W = T$ ресурс, меньший своей выходной пропускной способности: $\tilde{q}_j < r_j^{out}$, при любом $W > T$ имеют в предельном состоянии ресурс, равный \tilde{q}_j , и вектор предельного состояния имеет вид: $Q^ = (r_1^{out} + \Delta q_1^*, \dots, r_l^{out} + \Delta q_l^*, \tilde{q}_{l+1}, \dots, \tilde{q}_n)$, где $\Delta q_i^* \geq 0$ – излишки ресурса, распределенные между потенциальными аттракторами. $\sum_{i=1}^l \Delta q_i^* = W - T$.*

С л е д с т в и е 3.6. В регулярной несимметричной сети, имеющей один потенциальный аттрактор, при любом $W > T$ предельное состояние единственно и не зависит от начального распределения ресурса.

С л е д с т в и е 3.7. В предельном случае, когда все вершины являются потенциальными аттракторами и $l = n$, предельный поток существует и $F^{in} = (F^{out*})^T = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$.*

Если сеть имеет более одного потенциального аттрактора, ее предельное состояние не единственно. Распределение ресурса по потенциальным аттракторам зависит от начального состояния сети. Ресурс в остальных вершинах в предельном состоянии одинаков для любого $W > T$.

Исследование динамики потоков позволяет установить соответствия между предельным потоком в ресурсных сетях и максимальным потоком в классической модели Форда – Фалкерсона. Максимальный поток между источником и стоком равен пропускной способности минимального разреза. Поскольку в ресурсной сети каждая вершина является и источником и стоком, аналогом разреза здесь может служить величина $r^{\min} = \sum_{j=1}^n r_j^{\min}$, где для каждой вершины v_j величина $r_j^{\min} = \min(r_j^{in}, r_j^{out})$ является его пропускной способностью. Из теоремы 3.1 следует, что для несимметричной сети предельный поток строго меньше минимального разреза: $f_{sum}^* = T < r^{\min}$, что является более точной оценкой, нежели полученная ранее оценка $T < r_{sum}$. Однако с другой стороны, поскольку каждая вершина способна хранить любое количество ресурса, неустойчивые потоки могут превышать r^{\min} и даже достигать значения r_{sum} .

3.2. Семейство сетей, соответствующих одной стохастической матрице

Любой матрице пропускной способности R соответствует единственная матрица R' :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \dots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ r_1^{out} & r_1^{out} & \dots & r_1^{out} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \dots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \\ r_n^{out} & r_n^{out} & \dots & r_n^{out} \end{pmatrix}$$

С другой стороны, одной стохастической матрице R' соответствует бесконечное множество матриц пропускных способностей R , поскольку пропорциональное изменение строк матрицы R инвариантно относительно R' .

Заметим, что пропорциональное изменение i -й строки матрицы R соответствует изменению пропускных способностей всех выходных ребер i -й вершины сети.

Инвариантность относительно R' задает отношение эквивалентности на множестве матриц пропускной способности. Семейство матриц пропускной способности, имеющих одну и ту же стохастическую матрицу R' , обозначим через $[R']$; $[R'_i]$, $i = 1, 2, \dots$ – классы эквивалентности на множестве матриц пропускной способности.

$$R_k \sim R_m \Leftrightarrow R_k \in [R'_i] \ \& \ R_m \in [R'_i].$$

Исследуем предельные состояния для различных матриц пропускной способности, соответствующих одной и той же стохастической матрице R'_i , и влияние изменения суммарной пропускной способности на пороговое значение T .

Сначала приведем несколько примеров функционирования сетей с различными матрицами пропускной способности, соответствующими одной стохастической матрице. Эти примеры иллюстрируют влияние выбора матрицы пропускной способности R_m из заданного семейства $[R'_i]$, на

компоненты вектора предельного состояния, величину порогового значения T , а также на способность вершины быть потенциальным аттрактором.

Все примеры рассматриваются для семейства матриц, соответствующих стохастической матрице 3×3 :

$$R_i' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{5}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2. Матрица пропускной способности:

$$(3.4) \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Суммарный ресурс $W = 1$. $Q(0) = (1, 0, 0)$.

Таблица 3.1. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	1,000	0,000	0,000
1	0,333	0,333	0,333
2	0,256	0,356	0,389
3	0,250	0,357	0,393
4	0,250	0,357	0,393
...			

Полученное предельное состояние Q^{1*} позволяет построить матрицу R_i^{∞} , состоящую из трех одинаковых строк Q^{1*} :

$$R_i^{\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,357 & 0,393 \\ 0,25 & 0,357 & 0,393 \\ 0,25 & 0,357 & 0,393 \end{pmatrix}$$

Кортеж ρ (формула (1.7)) для этой сети будет следующим: $\rho = ((6, 3), (9, 10), (10, 12))$. Сеть обладает одним приемником и двумя источниками. Из формулы (2.8) следует, что при увеличении W ресурс будет расти в вершинах пропорционально, пока W не достигнет порогового значения T . Далее ресурс во всех не-аттракторах стабилизируется, и

накопление происходит только в аттракторе. По теоремам 2.2-2.3 пороговое значение T достигается, когда одна из вершин в предельном состоянии получает ресурс, равный своей выходной пропускной способности. В данном случае компоненты вектора предельного состояния растут пропорционально, пока суммарный ресурс не достигнет значения $W = 12$. Рассмотрим функционирование сети при $W = 12$.

Пример 3.3. Та же матрица пропускной способности (3.4); $Q(0) = (12, 0, 0)$.

Таблица 3.2. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	12,000	0,000	0,000
1	10,000	1,000	1,000
2	8,433	1,733	1,833
3	7,218	2,304	2,478
4	6,274	2,748	2,978
...			
38	3,001	4,285	4,714
39	3,000	4,286	4,714
40	3,000	4,286	4,714
...			

Как видно из протокола, ресурс в вершине-приемнике в предельном состоянии достиг значения r_1^{out} , равного 3.

При дальнейшем увеличении ресурса приемник переходит на функционирование по правилу 1, т.е. отдает по полной пропускной способности в каждое выходное ребро, оставляя излишки себе. Так, например, для суммарного ресурса $W = 100$ в этой сети предельное состояние (с точностью до трех знаков) будет: $Q^* = (91, 4,286, 4,714)$.

Таким образом, пороговое значение T находится как сумма:

$$T \approx 3 + 4,286 + 4,714 = 12.$$

3.2.1. Матрицы с большей выходной пропускной способностью вершин-источников

Исследуем изменение вектора предельного состояния для матрицы из того же семейства $R_2 \in [R_i']$, которая отличается от R_1 пропорциональным увеличением всех пропускных способностей одного из источников.

Пример 3.4. Третья строка матрицы R_2 отличается от третьей строки матрицы (3.4) в пять раз:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 20 & 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

Суммарный ресурс $W = 1$. $Q(0) = (1, 0, 0)$.

Протокол работы программы для суммарного ресурса $W = 1$ полностью совпадает с протоколом примера 3.2:

Таблица 3.3. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	1,000	0,000	0,000
1	0,333	0,333	0,333
2	0,256	0,356	0,389
3	0,250	0,357	0,393
4	0,250	0,357	0,393
...			

Пороговое значение T для такой сети также равно 12.

Таким образом при пропорциональном увеличении выходных пропускных способностей источников 1) вектор предельного состояния Q^{1*} , соответствующий $W = 1$, остается неизменным, 2) пороговое значение T остается постоянным, и при его превышении ресурс во всех вершинах не-аттракторах в предельном состоянии не изменяется для любого $W > T$.

3.2.2. Матрицы с большей выходной пропускной способностью вершин-приемников

Рассмотрим матрицу $R_3 \in [R_i']$, которая отличается от R_1 большей пропускной способностью приемника. Для этого в матрице (3.4) начнем пропорционально увеличивать пропускные способности первой вершины.

Однако при увеличении выходной пропускной способности приемника следует обозначить границу, при переходе которой эта вершина перестанет быть приемником, т.е. начнет отдавать больше, чем получать.

Пример 3.5. Выходные пропускные способности приемника матрицы (3.4) увеличены вдвое.

$$R_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Суммарный ресурс $W = 1$. $Q(0) = (1, 0, 0)$.

Кортеж ρ имеет вид: $\rho = ((7, 6), (10, 10), (11, 12))$. Первая вершина осталась приемником, а вторая вершина из источника превратилась в нейтральную.

Таблица 3.4. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	1,000	0,000	0,000
1	0,333	0,333	0,333
2	0,256	0,356	0,389
3	0,250	0,357	0,393
4	0,250	0,357	0,393
...			

Как видно, протокол полностью совпал с протоколом из примеров 3.2, 3.4. Предельное распределение единичного ресурса оказалось тем же.

Однако пороговое значение, при котором в приемнике начинает происходить накопление ресурса, и он переходит на правило 1, изменяется. Суммарная выходная пропускная способность вершины-приемника увеличилась вдвое. При этом вдвое увеличивается и пороговое значение T , и значения ресурсов, на которых происходит стабилизация остальных вершин.

Пример 3.6. Матрица R_3 из примера 3.5; суммарный ресурс $W = 24 \approx T$. $Q(0) = (24, 0, 0)$.

Таблица 3.5. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	24,000	0,000	0,000
1	20,000	2,000	2,000
2	16,867	3,467	3,667
3	14,436	4,609	4,956

4	12,548	5,495	5,956
...			
46	6,000	8,572	9,428
47	6,000	8,572	9,428
...			

$$T = 6 + 8,572 + 9,428 = 24$$

Пороговое значение выросло в два раза. Кроме того, для каждой вершины из примера 4 выполняется: $3 \cdot 2 = 6$; $4,286 \cdot 2 = 8,572$; $4,714 \cdot 2 = 9,428$, т.е. все компоненты вектора предельного состояния при $W = T$ возрастают вдвое.

3.2.3. Матрицы с другой вершиной-приемником

Матрицу $R_4 \in [R_i']$ снова сконструируем из матрицы R_1 (3.4), увеличив пропускные способности приемника втрое.

Пример 3.7. Приемник в другой вершине.

$$R_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Суммарный ресурс $W = 1$. $Q(0) = (1, 0, 0)$.

Для такой конфигурации сети кортеж ρ будет:

$$\rho = ((8, 9), (11, 10), (12, 12)).$$

Все вершины сети изменили свой статус. Первая из приемника превратилась в источник, вторая стала приемником, а третья – нейтральной вершиной.

Таблица 3.6. Протокол работы при суммарном ресурсе, равном 1

t	v_1	v_2	v_3
0	1,000	0,000	0,000
1	0,333	0,333	0,333
2	0,256	0,356	0,389
3	0,250	0,357	0,393
4	0,250	0,357	0,393
...			

Из этого протокола видно, что вектор Q^{1*} для данной стохастической матрицы, несмотря на разные матрицы пропускной способности, ей соответствующие, и на смену статуса вершин, остается неизменным.

Исследуем поведение этой сети при увеличении суммарного ресурса.

Увеличение ресурса вплоть до $W = 28$ влечет за собой пропорциональное увеличение компонент вектора предельного состояния. Ресурс, равный 28, оказывается пороговым значением для такой конфигурации.

Пример 3.8. Матрица пропускной способности R_4 ; суммарный ресурс $W = 28 \approx T$. $Q(0) = (28, 0, 0)$.

Таблица 3.7. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3
0	28,000	0,000	0,000
1	22,000	3,000	3,000
2	17,300	5,200	5,500
3	13,653	6,913	7,433
4	10,822	8,243	8,934
5	8,625	9,275	10,100
6	7,169	9,952	10,879
7	7,011	9,997	10,992
8	7,001	10,000	10,999
9	7,000	10,000	11,000
...			

Дальнейшее увеличение суммарного ресурса отразится только на изменении ресурса в вершине 2 (новом приемнике сети). Так, при суммарном ресурсе, равном 100, предельное состояние будет: $Q^* = (7,000, 82,000, 11,000)$

Предельное значение T находится из того условия, что в аттракторе ресурс должен быть равен выходной пропускной способности, – в данном случае, 10, – и все три ресурса в вершинах пропорциональны компонентам вектора Q^{1*} .

Вектор предельного состояния при $W = T$: $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$. Тогда имеем:

$$\tilde{q}_1 = 0,250T;$$

$$\tilde{q}_2 = 0,357T = 10;$$

$$\tilde{q}_3 = 0,393T;$$

Из второго соотношения имеем: $T = 28$. Тогда: $\tilde{q}_1 = 7$; $\tilde{q}_3 = 11$.

Сформулируем ряд утверждений, обобщающих полученные результаты.

3.3. Вектор Q^{1*} и пороговое значение T

Теорема 3.2. Все сети семейства $[R_i']$ при $W = 1$ имеют один и тот же вектор предельного состояния Q^{1*} .

Доказательство. Так как матрица R_i' для всех сетей семейства одинакова, то $(R_i')^\infty$ также одинакова. Поскольку $(R_i')^\infty = \mathbf{1} \cdot Q^{1*}$, где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, состоящий из n единиц, то и вектор Q^{1*} у всех таких сетей – один и тот же. \square

Следствие. Для любой матрицы R_m из семейства $[R_i']$ неизменным будет также определяемый по формуле (2.5) вектор Q^* , соответствующий суммарному ресурсу W , при $W \leq T$.

Сформулируем и докажем теорему, позволяющую выразить пороговое значение T через выходную пропускную способность аттрактора и вектор Q^{1*} . Рассмотрим сначала сеть с одним аттрактором. Не нарушая общности, введем такую нумерацию вершин, что аттрактор имеет номер 1.

Теорема 3.3. В несимметричной регулярной сети, обладающей единственным аттрактором с номером 1:

1) компоненты вектора $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$, соответствующего суммарному ресурсу $W = T$, находятся по формуле:

$$\tilde{q}_i = \frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} q_i^{1*};$$

2) пороговое значение ресурса T находится как:

$$(3.5) \quad T = \frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}}.$$

Доказательство. При $W \leq T$ вектор предельного состояния пропорционален вектору Q^{1*} . Когда суммарный ресурс достигает значения T ,

одна или несколько вершин в предельном состоянии имеют ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Поскольку потенциальный аттрактор один, то и такая вершина единственна (следствие 3.4 из теоремы 3.1). По условию теоремы она имеет номер 1.

Тогда:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_1 &= q_1^{1*} T = r_1^{out}, \\ \tilde{q}_i &= q_i^{1*} T < r_i^{out}, \quad (i > 1). \end{aligned}$$

Из (3.6) следует: $T = \frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}}; \tilde{q}_i = \frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} q_i^{1*} \quad \square$

З а м е ч а н и е. Формула (3.6) объясняет пример 3.5: при пропорциональном увеличении выходной пропускной способности аттрактора в такой же пропорции увеличивается значение T .

3.4. Свойство аттрактивности и предельное состояние сети

Значение T определяется через параметры потенциального аттрактора. По следствию 3.4 из теоремы 3.1, вершина является потенциальным аттрактором, если и только если при $W = T$ она имеет в предельном состоянии ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Однако этот критерий не является конструктивным, так как потенциальный аттрактор и пороговое значение определяются друг через друга.

Сформулируем критерий аттрактивности вершины.

Т е о р е м а 3.4 (о б а т т р а к т о р а х). Вершина v_j

несимметричной регулярной сети является потенциальным аттрактором,

если и только если $j = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой вершины рассмотрим отношение:

$$T_i = \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку при суммарном ресурсе, равном T , как минимум одна вершина в предельном состоянии получит ресурс, равный своей выходной пропускной способности, для нее выполнится: $\tilde{q}_k = r_k^{out}$. С другой стороны,

$$\tilde{q}_k = q_k^{1*} T, \text{ и отсюда } T = \frac{\tilde{q}_k}{q_k^{1*}} = \frac{r_k^{out}}{q_k^{1*}}.$$

Тогда, по крайней мере, для одной вершины верно: $T_k = T$.

Значение T определяется из того условия, что при увеличении суммарного ресурса в сети, функционирующей по правилу 2, до величины T , некоторая вершина первой из всех получит ресурс, равный своей выходной пропускной способности.

Таким образом, при $W = T$:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_k &= r_k^{out}; \\ \tilde{q}_i &\leq r_i^{out}, i \neq k. \end{aligned}$$

Перепишем (3.7) в следующем виде: $q_i^{1*} T \leq r_i^{out}$, или $T \leq \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$

$$(i = 1, \dots, n), \text{ а это и означает, что } T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Если это минимальное значение достигается сразу в нескольких вершинах, все они являются потенциальными аттракторами.

Докажем обратное утверждение: если в сети существует несколько вершин, для которых выполняется равенство $\tilde{q}_j = r_j^{out}$, для всех них

$$\frac{r_j^{out}}{q_j^{1*}} = T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Пусть вершина v_l – тот из потенциальных аттракторов, для которого

$$T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}} = \frac{r_l^{out}}{q_l^{1*}}. \text{ Пусть вершина } v_k \text{ – также потенциальный аттрактор.}$$

Тогда для нее справедливо: $\tilde{q}_k = r_k^{out}$. Найдем значение отношения $\frac{r_k^{out}}{q_k^{1*}}$.

Поскольку при $W = T$ все вершины функционируют по правилу 2, ресурс вершины v_k будет: $\tilde{q}_k = T \cdot q_k^{1*} = \frac{r_l^{out}}{q_l^{1*}} \cdot q_k^{1*}$.

С другой стороны, как уже было сказано, $\tilde{q}_k = r_k^{out}$. Тогда:

$$r_k^{out} = \frac{r_l^{out}}{q_l^{1*}} \cdot q_k^{1*} \text{ или } \frac{r_k^{out}}{q_k^{1*}} = \frac{r_l^{out}}{q_l^{1*}} = T. \square$$

З а м е ч а н и е. Непосредственно из доказательства теоремы следует, что пороговое значение T находится по формуле $T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$.

Доказанная теорема позволяет найти потенциальные аттракторы сети по матрицам R и $R^{1\infty}$, а также вычислить пороговое значение T и координаты вектора предельного состояния всех не-аттракторов для суммарного ресурса, превышающего значение T . Вектор предельного состояния при малых ресурсах был определен в главе 2.

Обобщим результаты, полученные для регулярных несимметричных сетей, в следующую теорему.

Т е о р е м а 3.5 (о предельном состоянии). Значения компонент вектора предельного состояния $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ регулярной несимметричной ресурсной сети зависят от суммарной величины ресурса W и определяются по следующим формулам:

$$1. \text{ При } W \leq T, \text{ где } T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}:$$

$$(3.8) \quad q_i^* = q_i^{1*} \cdot W$$

2. При $W > T$ ресурс во всех не-аттракторах рассчитывается по формуле:

$$(3.9) \quad q_i^* = q_i^{1*} \cdot T, \text{ } i \neq j_k, \text{ где } j_k \text{ — номера аттракторов.}$$

$$j_k \text{ определяются из условия: } j_k = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

Оставшийся ресурс распределяется между потенциальными аттракторами.

Таким образом, вектор Q^* определяется тремя параметрами:

- 1) суммарным ресурсом W ;
- 2) любой строкой матрицы предельных вероятностей стохастической матрицы R^{1^∞} ;
- 3) суммарными выходными пропускными способностями потенциальных аттракторов: r_i^{out} .

При $W \leq T$ предельное состояние единственно. При $W > T$ становится существенным деление вершин на потенциальные аттракторы и множество остальных вершин. Количество ресурса в аттракторах в предельном состоянии зависит от его начального распределения. Все не-аттракторы получают фиксированное количество ресурса $q_i^* = \tilde{q}_i = q_i^{1^*} \cdot T$.

З а м е ч а н и е. Для нахождения аттрактора, определения порогового значения T и координат вектора предельного состояния Q^* нужно предварительно вычислить координаты вектора Q^{1^*} , т.е. их нельзя выразить только через элементы матрицы R . Однако формулы (3.8)-(3.9) верны для любого ресурса, циркулирующего в сети, и инвариантны относительно пропорционального изменения строк матрицы пропускной способности R . Это означает, что, один раз вычислив вектор $Q^{1^*} = (q_1^{1^*}, \dots, q_n^{1^*})$, не прибегая более к численным методам, можно получить результаты для семейства матриц и любого суммарного ресурса в сети.

Аналогично теореме о предельном состоянии можно сформулируем теорему о предельном потоке.

Т е о р е м а 3.6 (о предельном потоке). В регулярной несимметричной ресурсной сети предельный поток определен однозначно при любом значении W :

$$1^\circ. \text{ При } W \leq T \quad f_i^{in^*} = f_i^{out^*} = q_i^{1^*} W, \text{ где } T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1^*}};$$

$$2^\circ. \text{ При } W > T \quad f_i^{in*} = f_i^{out*} = q_i^{1*} T.$$

Теорема о предельном потоке показывает, что поток задан однозначно для всех значений суммарного ресурса W . Что касается теоремы о предельных состояниях – если в сети несколько потенциальных аттракторов, распределение ресурса, равного $W - T$ сверх значений r_{jk}^{out} в аттракторах зависит от начального состояния; предельное состояние определяется во всех вершинах, кроме аттрактивных.

3.5. Построение матрицы R с произвольным количеством аттракторов по заданной матрице R'

Как было сказано выше, каждой стохастической матрице R_i' соответствует семейство матриц пропускной способности $[R_i']$.

Пусть есть некоторая регулярная несимметричная сеть с матрицей пропускных способностей R и пусть v_j – ее аттрактор. Ей соответствует стохастическая матрица R' , задающая семейство $[R']$. Пороговое значение T выражается через параметры аттрактора: $T = \frac{r_j^{out}}{q_j^{1*}}$. Рассмотрим вершину v_k , не

являющуюся аттрактором. Поскольку пропорциональное изменение любой строки матрицы R' инвариантно относительно R , уменьшим выходные пропускные способности вершины v_k , с тем, чтобы она также стала аттрактором этой сети. Для v_k должно выполняться:

$$(3.10) \quad \frac{r_k^{out}}{q_k^{1*}} = \frac{r_j^{out}}{q_j^{1*}}.$$

В (3.10) r_k^{out} – переменная величина, поскольку в строке с номером k все значения должны пропорционально измениться. Остальные значения – константы. Отсюда имеем:

$$(3.11) \quad r_k^{out} = \frac{q_k^{1*}}{q_j^{1*}} r_j^{out}.$$

Замечание. Обратное преобразование: увеличение выходной пропускной способности вершины v_j (если она являлась единственным аттрактором), может не дать желаемого эффекта, так как v_j может утратить при этом статус аттрактора.

После преобразования k -й строки матрицы R в соответствии с (3.11), для аттракторов v_j и v_k выполнится соотношение:

$$(3.12) \quad \frac{r_k^{out}}{r_j^{out}} = \frac{q_k^{1*}}{q_j^{1*}},$$

– выходные пропускные способности вершин-аттракторов должны относиться как их компоненты вектора предельного состояния при единичном (или любом малом) ресурсе.

Пример 3.9. Рассмотрим сеть с двумя приемниками, оба из которых являются потенциальными аттракторами. Сеть содержит пять вершин. Ее матрица пропускных способностей и стохастическая матрица имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

В этой сети предельное состояние для $W = 1$ будет: $Q^{1*} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$,

$\rho = ((10, 5), (10, 5), (5, 10), (5, 10), (5, 5))$. $T = 20$.

Равенства (3.10) – (3.12) выполняются для вершин v_1 и v_2 , в силу построения матрицы R . Однако можно, варьируя выходные пропускные способности какой-либо из остальных вершин (и оставаясь в рамках

семейства $[R']$), добиться того, что в сети появится еще один аттрактор – предположим, это будет нейтральная вершина v_5 . Для этого нужно уменьшить ее выходные пропускные способности, чтобы выполнялись (3.11).

$$r_5^{out} = \frac{1}{6} : \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{10}{3}.$$

Таким образом, в сети, заданной матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

имеется уже три потенциальных аттрактора. Продолжая эти рассуждения, легко заметить, что для вершин-источников v_3 и v_4 и коэффициент пропорциональности тот же, и сеть с матрицей:

$$(3.13) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

имеет пять потенциальных аттракторов.

Заметим, что у матрицы (3.13) для любой вершины выполняется:

$$\frac{r_k^{out}}{q_k^{1*}} = 20 = T, \text{ что и является критерием аттрактивности. В такой сети}$$

предельное состояние полностью зависит от начального. Чтобы привести дробные пропускные способности к целым, каждую строку матрицы умножим на 3:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сеть с такой матрицей также будет иметь пять потенциальных аттракторов. Ее кортеж ρ имеет вид:

$$\rho = ((15, 15), (15, 15), (10, 10), (10, 10), (10, 10)).$$

Для матрицы (3.13) этот кортеж будет, соответственно, иметь элементы, в три раза меньшие: $\rho = \left((5,5), (5,5), \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right), \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right), \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right) \right)$.

В сети, в которой все вершины являются потенциальными аттракторами, не может быть источников. (Источники по теореме 2.1 обязаны перейти в зону $Z(t)$ при сколь угодно большом суммарном ресурсе, циркулирующем в сети, что противоречит определению аттрактора). Следовательно, не может быть и приемников. Поэтому все вершины могут быть только нейтральными (что и видно из приведенного примера). Сети, в которых для каждой вершины входная пропускная способность равна выходной пропускной способности, названы эйлеровыми. Их рассмотрению посвящена четвертая глава.

3.6. Оценка числа сетей с неединственным аттрактором

Рассмотрим семейство матриц $[R']_{n \times n}$, соответствующих стохастической матрице R' . Пусть матрица $R \in [R']$ имеет единственный аттрактор v_j . Зафиксируем все строки этой матрицы, кроме строки с номером $k \neq j$. Будем пропорционально изменять элементы выделенной строки, так что суммарная пропускная способность r_k^{out} пробегает значения на полуинтервале

$$\left[\frac{q_k^{1*}}{q_j^{1*}} r_j^{out}, \infty \right). \text{ Из формулы (3.11) следует, что при } r_k^{out} < \frac{q_k^{1*}}{q_j^{1*}} r_j^{out} \text{ вершина } v_j$$

перестанет быть аттрактором. При любом значении $r_k^{out} > \frac{q_k^{1*}}{q_j^{1*}} r_j^{out}$ v_j – единственный аттрактор, и только в одной точке (в левом конце указанного полуинтервала) сеть будет иметь два аттрактора.

Аналогично, изменяя i строк, можно получить сеть с $i + 1$ аттракторами.

Таким образом, при фиксированной строке, соответствующей аттрактору, существует $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i = 2^{n-1} - 1$ матриц, задающих сети с более чем одним потенциальным аттрактором. Множество матриц с единственным аттрактором, соответственно, континуально при $R \in \mathbb{R}^2$ и счетно при $R \in \mathbb{Q}^2$. Отсюда следует, что теорема о предельном состоянии определяет предельное состояние однозначно почти всегда за исключением указанного конечного множества.

Регулярные несимметричные сети с несколькими аттракторами функционируют наиболее сложным образом и представляют собой отдельный объект исследования. Именно для таких сетей можно поставить задачу управления, описанную в главе 7.

3.7. Полная сеть с одним приемником и одним источником

Из теоремы о предельном состоянии следует, что в общем случае в несимметричной сети вектор предельного состояния нельзя выразить лишь через пропускные способности. Однако для некоторых частных случаев такую зависимость получить возможно.

Рассмотрим полную однородную сеть с n вершинами и пропускными способностями r . Результаты для таких сетей, полученные в [83], были описаны в первой главе. Увеличим пропускную способность одного ребра в α раз ($\alpha > 1$). Поскольку граф полный и однородный, выбор ребра может быть произвольным. Пусть это ребро (v_2, v_1) . Тогда $r_{21} = \alpha r$, $r_{ij} = r$ ($i \neq 2, j \neq 1$).

Для $n = 5$ сеть представлена на рисунке 3.7.

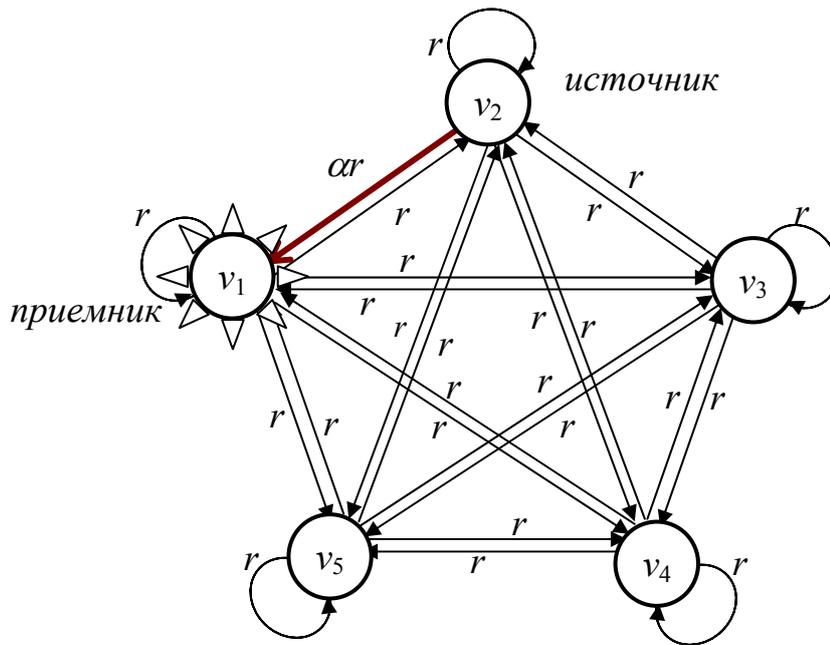


Рис. 3.7. Полная сеть с одним источником и одним приемником

В такой сети для всех вершин, кроме вершины-источника,

$r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij} = rn$. Для источника выходная пропускная способность будет:

$$r_1^{out} = \sum_{j=1}^n r_{1j} = r(n + \alpha - 1).$$

Кортеж ρ для этой сети будет иметь вид:

$$\rho = ((r(n + \alpha - 1), rn), (rn, r(n + \alpha - 1)), (rn, rn), \dots, (rn, rn)).$$

Теорема 3.7 позволяет вычислить значение T и предельное состояние при больших ресурсах, используя только знание о пропускных способностях сети (для предельного состояния кроме этого необходимо знать суммарный ресурс).

Теорема 3.7. В полной сети, с пропускными способностями $r_{21} = \alpha r, r_{ij} = r (i \neq 2, j \neq 1)$, где $\alpha > 1$:

$$1) T = rn \frac{n^2 + (n+1)(\alpha-1)}{n+2(\alpha-1)},$$

2) для любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ при $W > T$ предельное состояние имеет вид:

$$Q^* = (W - (n-1)q^*, q^*, \dots, q^*),$$

$$\text{где } q^* = rn \frac{n + (\alpha - 1)}{n + 2(\alpha - 1)}.$$

Вектор предельного состояния при малых ресурсах находится по теореме 3.8.

Теорема 3.8. В несимметрично-однородной сети, заданной кортежем

$\rho = (\{r(n + \alpha - 1), rn\}, \{rn, r(n + \alpha - 1)\}, \{rn, rn\}, \dots, \{rn, rn\})$, где $\alpha > 1$, для любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0))$ при $W \leq T$ процесс распределения ресурса сходится, и предельное состояние $Q^* = (q_1^*, q^*, \dots, q^*)$ описывается формулами:

$$(3.14) \quad q^* = W \frac{n + (\alpha - 1)}{n^2 + (n + 1)(\alpha - 1)};$$

$$q_1^* = W \frac{n + 2(\alpha - 1)}{n^2 + (n + 1)(\alpha - 1)}.$$

Следствие. При $W = T$ предельное состояние в сети будет $Q^* = (rn, q^*, \dots, q^*)$, где q^* вычисляется по формуле (3.14).

В доказательствах теорем 3.7 и 3.8 формулы для компонент вектора предельного состояния рассчитываются как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий: отдельно для источника и нейтральных вершин и отдельно для вершины-приемника. Полностью доказательства этих двух теорем и вспомогательных утверждений опубликованы в [47].

Выводы

1. Описан поток в регулярных сетях при $W \leq T$.
2. Доказана теорема о существовании и единственности предельного потока в несимметричных сетях при $W > T$; найдена матрица предельного потока.
3. Как следствие из существования предельного потока, доказано существование предельного состояния.
4. Показано, что векторы входного и выходного потоков при любом ресурсе $W > T$ совпадают с вектором предельного состояния при $W = T$; показано, что суммарный предельный поток f_{sum}^* при $W \leq T$ равен W , при $W > T$ равен T .
5. Показано, что все потенциальные аттракторы при $W = T$ в предельном состоянии имеют ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Остальные вершины в предельном состоянии имеют ресурс, строго меньший выходной пропускной способности при любом $W > T$, даже если это вершины-приемники.
6. Сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершины.
7. Пороговое значение T выражено через компоненты вектора предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова Q^{1*} и выходные пропускные способности вершины-аттрактора.
8. Доказано, что в сети с одним аттрактором предельное состояние при любом значении суммарного ресурса определяется единственным образом и не зависит от начального состояния. В сетях с несколькими аттракторами предельное состояние определено с точностью до распределения излишка ресурса $W - T$ между аттракторами.
9. Введены классы эквивалентности на множестве матриц пропускной способности размера $n \times n$.
10. Показано, что в любом классе эквивалентности $[R_i']$ существует матрица с любым произвольно заданным множеством аттракторов. Предложен метод построения таких матриц по стохастической матрице R_i' .

11. Показано, что при фиксированной строке, соответствующей выделенному аттрактору, множество матриц с неединственным аттрактором в любом классе эквивалентности $[R_i']$ конечно, его мощность равна $2^{n-1} - 1$. Множество матриц с единственным аттрактором не менее чем счетно.

12. Для полной сети с одним приемником, одним источником и однородными пропускными способностями всех ребер, кроме ребра, соединяющего источник с приемником, получены формулы компонент вектора предельного состояния и порогового значения T . Для таких сетей все их предельные характеристики находятся в явном виде, как это было в случае полных однородных сетей.

ГЛАВА 4. РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ СЕТИ

По определению в эйлеровых сетях для каждой вершины выполняется равенство $r_i^{in} = r_i^{out}$, и, следовательно, все вершины нейтральны. Если при этом матрица пропускных способностей симметрична, эйлерова сеть называется симметричной, если нет, квазисимметричной. Если все ненулевые элементы матрицы пропускных способностей одинаковы, сеть однородна. Эти сети объединены в один класс, поскольку обладают общими свойствами, заключающимися не только в равенстве входных и выходных пропускных способностей в каждой вершине. Все они демонстрируют одинаковое поведение, как при малых, так и при больших ресурсах. В настоящей главе мы покажем, что все основные характеристики сетей, такие как предельные состояния, предельные потоки, пороговое значение T , для сетей этого класса одинаковы.

4.1. Существование предельного состояния и пороговое значение T

При доказательстве существования предельного состояния в сетях для $W \leq T$ использовалось только свойство регулярности сети. Поэтому при малых ресурсах предельное состояние в эйлеровых сетях существует и единственно. Найдем пороговое значение T и рассмотрим функционирование эйлеровых сетей с ресурсом выше порогового значения.

Теорема 4.1. В регулярной эйлеровой сети пороговое значение T равно ее суммарной пропускной способности: $T = r_{sum}$.

Доказательство. Очевидно, что $T \leq r_{sum}$. Предположим, что выполняется строгое неравенство $T < r_{sum}$. Тогда по определению T существует такое значение ресурса W : $T < W < r_{sum}$, что при суммарном ресурсе в сети, равном W , в предельном состоянии по крайней мере одна вершина будет отдавать ресурс по правилу 1, т.е. для нее выполнится: $q_i^* > r_i^{out}$, и она отдает на каждом такте ресурс, равный r_i^{out} . А поскольку в

предельном состоянии входной и выходной потоки вершин совпадают, принимает вершина v_i на каждом такте тоже r_i^{out} ресурса. Так как в эйлеровой сети $r_i^{in} = r_i^{out}$, по каждому входному ребру в вершину v_i приходит по полной пропускной способности. Таким образом, все смежные с ней вершины имеют ресурс, не меньший своих выходных пропускных способностей: r_j^{out} . Сеть является связной. Продолжая подобные рассуждения для каждой вершины, получим, что все вершины имеют ресурс, не меньший своей выходной пропускной способности.

Тогда общий ресурс не может быть меньше $\sum_{j=1}^n r_j^{out} = r_{sum}$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает, что $T = r_{sum}$. \square

С л е д с т в и е 4.1. Непосредственно из доказательства теоремы вытекает, что для эйлеровой сети выполнится: $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$, где \tilde{Q} – вектор предельного состояния при $W = T$.

С л е д с т в и е 4.2. Если $v_i \in Z(0)$, то $\forall t > 0 v_i \in Z(t)$. (Это означает, что зона $Z^+(0)$ в процессе функционирования сети не может расширяться.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Входной поток некоторой вершины в эйлеровой сети может превышать выходной, только когда она находится в зоне $Z(t)$. Как только ресурс вершины $v_i \in Z(t)$ достигает значения r_i^{out} , ее выходной поток становится не меньше входного, и получить ресурс, больший этого значения, она не может. \square

С л е д с т в и е 4.3. В эйлеровой сети для любого суммарного ресурса W предельное состояние существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование предельного состояния при $W \leq T$ следует из того, что сеть регулярна. Из следствия 4.1 вытекает, что при $W = T$ предельное состояние сети описывается вектором $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$. При $W > T$ входной и выходной потоки ресурса будут стремиться к вектору

\tilde{Q} : $F^{in*} = F^{out*} = \tilde{Q}$. Поскольку существуют предельные потоки, предельное состояние тоже существует. \square

С л е д с т в и е 4.4. Если суммарный ресурс в эйлеровой сети больше порогового значения: $W > T$, для каждой вершины из зоны $Z^-(0)$ в предельном состоянии выполнится: $q_k^* = r_k^{out}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого следствия очевидно. Количество ресурса в каждой вершине при $W > T$, не может быть меньше, чем при $W = T$. А при $W = T$ по следствию 4.1 выполнится $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$. Таким образом, $q_k^* \geq r_k^{out}$. Но вершины из зоны $Z^-(0)$ не могут перейти в зону $Z^+(t)$, и таким образом, их ресурс не может превысить выходную пропускную способность. Отсюда $q_k^* = r_k^{out}$ для каждой вершины из зоны $Z^-(0)$. \square

4.2. Свойства эйлеровых сетей

В эйлеровых сетях динамика ресурса в вершинах может быть разнообразной: в вершинах могут возникать затухающие колебания; ресурс в вершинах может изменяться монотонно и немонотонно.

Исследование функционирования эйлеровых сетей при больших ресурсах позволяет сформулировать ряд свойств.

В главе 3 было показано, что если в сети все вершины являются потенциальными аттракторами, то сеть эйлерова. По теореме 4.1. верно и обратное утверждение, сформулированное в свойстве 4.1.

С в о й с т в о 4.1. Любая вершина в эйлеровой сети является потенциальным аттрактором: при $W > r_{sum}$ существует такое начальное состояние, из которого она может оказаться в зоне Z^{+*} .

С в о й с т в о 4.2. Все аттракторы эйлеровой сети *пассивны*: вершина может удержаться в зоне $Z^+(t)$, но не может туда перейти.

С в о й с т в о 4.3. При $W > r_{sum}$ некоторые из вершин, принадлежащих зоне $Z^+(0)$ могут оказаться в $Z^-(t)$ и, соответственно, в Z^{+*} .

Проиллюстрируем свойство 4.3 следующим примером.

Пример 4.1. Рассмотрим сеть с пятью вершинами (пример легко обобщается на любое количество вершин). Пусть матрица пропускных способностей имеет вид:

$$(4.1) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 50 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 50 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 50 \\ 50 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Кортеж $\rho = ((54, 54), (55, 55), (56, 56), (57, 57), (58, 58))$.

$r_{sum} = 280$.

Начальное состояние: $Q(0) = (205, 80, 0, 0, 0)$. $W = 285$.

Предельное состояние: $Q^* = (54, 60, 56, 57, 58)$.

Динамика ресурса представлена на рис. 4.1.

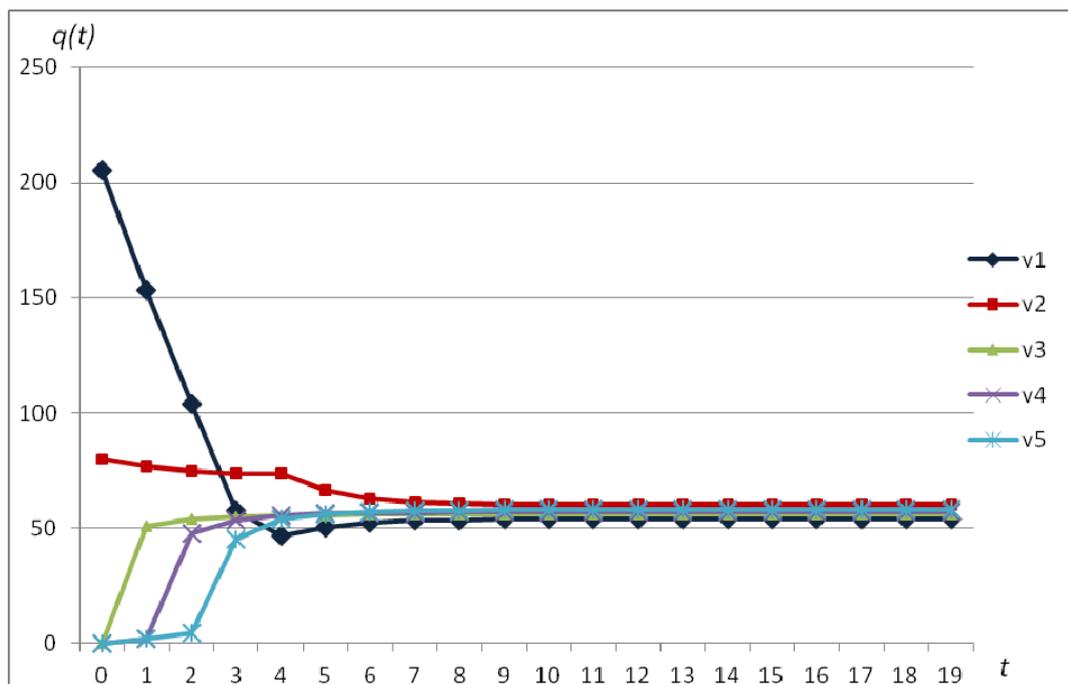


Рис. 4.1. Первая вершина переходит из $Z^+(t)$ в $Z(t)$

В зоне $Z^+(0)$ в начальном состоянии находятся первая и вторая вершины. Из рисунка видно, что хотя первая вершина имеет гораздо больший ресурс, чем вторая, именно она переходит в зону $Z(t)$ за первые пять тактов, и затем ее ресурс стремится к значению $r_1^{out} = 54$ снизу. Вторая

вершина остается в зоне $Z^+(t)$, и в предельном состоянии весь излишек ресурса $W - T = 5$ оказывается в ней.

Задача определения, какие из вершин для каждого конкретного начального состояния $Q(0)$ способны удержаться в зоне $Z^+(t)$, будет рассмотрена в разделе 4.5.

4.3. Предельное состояние сети при $W = 1$ и $W \leq T$

Существование предельного состояния при малых ресурсах было доказано для любой регулярной сети. Однако переходные процессы в эйлеровых сетях при их функционировании могут быть весьма разнообразными. Чаще всего ресурс, начиная с некоторого момента времени, стремится к предельному значению монотонно. Ниже приводятся два примера, которые показывают, что монотонность присутствует не всегда.

Пример 4.2. Рассмотрим функционирование сети, заданной матрицей (4.1) при суммарном ресурсе, меньшем порогового значения: $W = 50$.

$$Q(0) = (50, 0, 0, 0, 0).$$

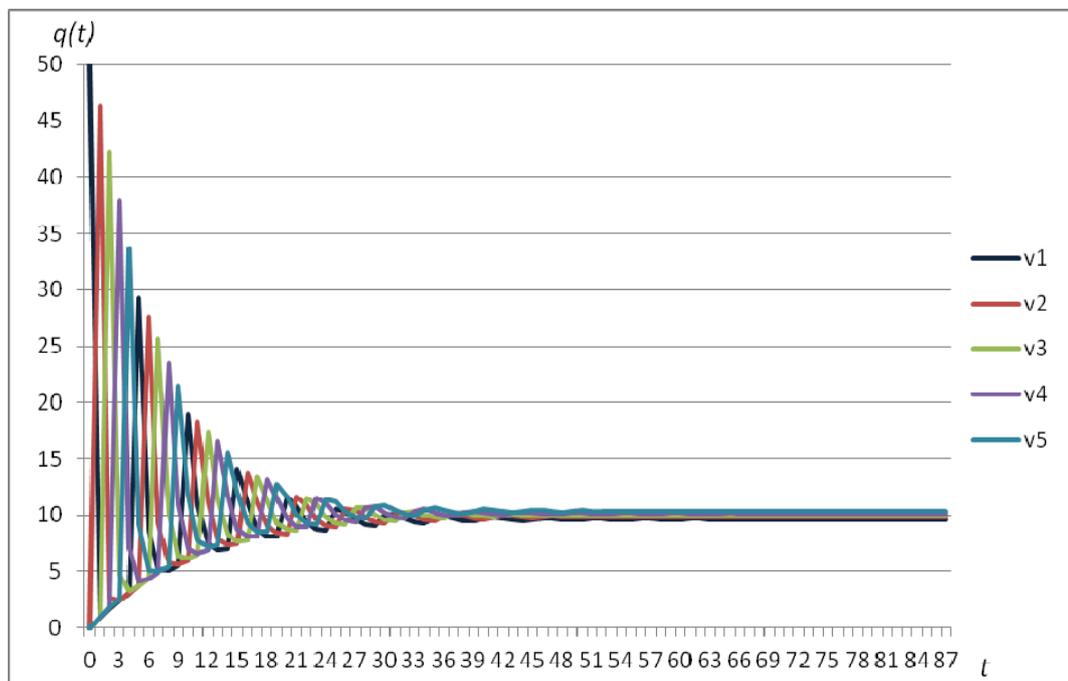


Рис. 4.2. Затухающие колебания в квазисимметричной сети

Из рисунка видно, что при малых ресурсах, когда во всех вершинах не может произойти быстрого насыщения, возможны значительные колебания. Сходимость обеспечивается за счет регулярности матрицы пропускных способностей.

Рассмотренная сеть является квазисимметричной. Однако колебания ресурса возникают не только в квазисимметричных сетях.

Пример 4.3. В матрице (4.1) отразим все пропускные способности, равные 50, относительно главной диагонали. Пусть по-прежнему $W = 50$.

$$Q(0) = (50, 0, 0, 0, 0).$$

$$(4.2) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 1 & 1 & 50 \\ 50 & 2 & 50 & 1 & 1 \\ 1 & 50 & 3 & 50 & 1 \\ 1 & 1 & 50 & 4 & 50 \\ 50 & 1 & 1 & 50 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица из квазисимметричной превратилась в симметричную, однако колебания ресурса вновь имеют место.

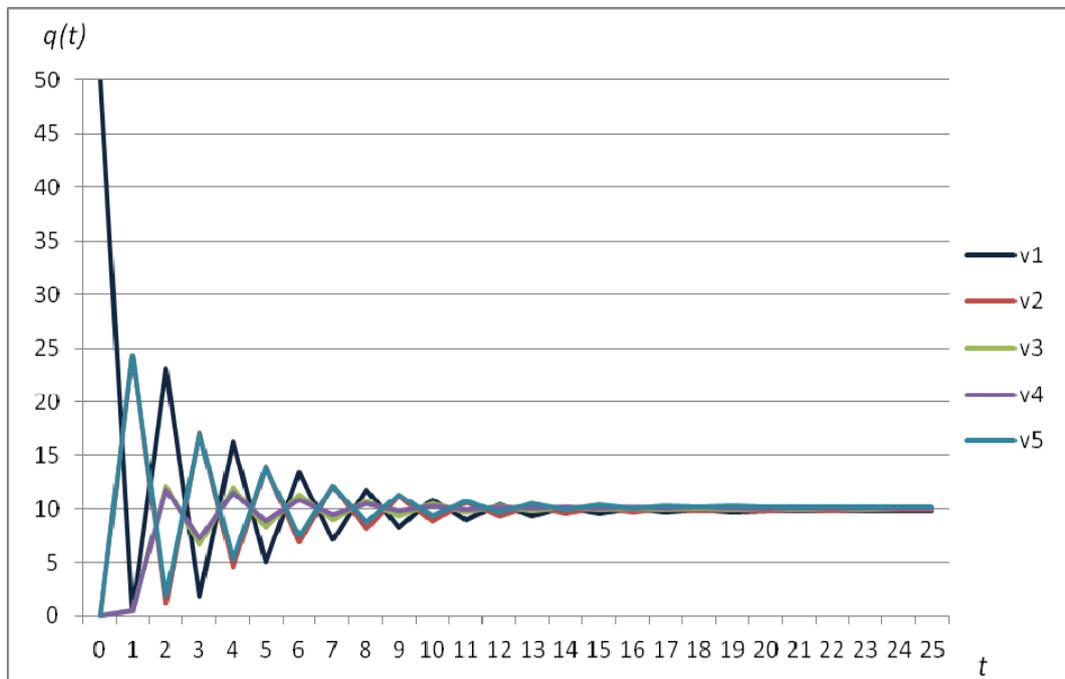


Рис. 4.3. Колебания ресурса в симметричной сети

Действуя аналогично, легко получить пример колебаний в однородной неполной сети. Для этого достаточно, например, обнулить все недиагональные элементы, не равные 50, в матрице (4.2).

Найдем вектор предельного состояния эйлеровой сети при малых ресурсах. Для начала рассмотрим функционирование сети с единичным ресурсом. Вектор состояния сети в момент t при $W = 1$, как и ранее, будем обозначать $Q^1(t)$. Предельное состояние – Q^{1*} .

Для несимметричных сетей этот вектор находится как собственный вектор стохастической матрицы R^1 , соответствующей матрице пропускной способности R .

Для эйлеровых сетей получены более сильные результаты.

Утверждение 4.1. В регулярной эйлеровой сети вектор предельного состояния при $W = 1$ имеет вид:

$$(4.3) \quad Q^{1*} = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}}, \dots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} \right).$$

Доказательство. Так как все вершины эйлеровой сети являются потенциальными аттракторами, для каждой из них выполнится:

$$\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}} = T. \text{ Но по теореме 4.1, } T = r_{sum}.$$

Отсюда следует, что $\forall i \quad q_i^{1*} = \frac{r_i^{out}}{r_{sum}}$, из чего непосредственно вытекает

формула (4.3):

$$Q^{1*} = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}}, \dots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} \right). \square$$

Замечание. Для полных однородных сетей с петлями, как частного случая эйлеровых сетей, получим: $Q^{1*} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$, что согласуется с результатами, полученными для полных однородных сетей в [83].

Для любого ресурса $W \leq T$ предельное состояние можно найти непосредственно из матрицы R и значения ресурса W :

$$Q^* = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}} W, \dots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} W \right).$$

4.4. Функционирование сети при $W > T$

При $W = T$ предельное состояние имеет вид $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$.

Пусть $W > T$ и в начальном состоянии в зоне $Z^+(0)$ находятся m вершин. Не нарушая общности, предположим, что эти вершины имеют номера от 1 до m , $m < n$ (если $m = n$, начальное состояние является устойчивым).

Тогда вектор начального состояния $Q(0)$ можно представить в следующем виде:

$$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0)).$$

Числа $c_1(0), \dots, c_m(0) > 0$ – превышения ресурса в вершинах относительно порогового значения (их выходной пропускной способности) – начальный профицит. Соответственно $d_{m+1}(0), \dots, d_n(0) \geq 0$ – начальный дефицит в вершинах.

Обозначим суммарный начальный профицит через $c_{sum}(0)$, суммарный начальный дефицит – через $d_{sum}(0)$.

$$c_{sum}(0) = \sum_{j=1}^m c_j(0), \quad d_{sum}(0) = \sum_{j=m+1}^n d_j(0).$$

На любом такте $t \geq 0$ дефицит и профицит связаны соотношением:

$$c_{sum}(t) - d_{sum}(t) = \text{const} = W - r_{sum}.$$

По следствию 3.5 из теоремы 3.1, вектор предельного состояния при $W > T$ имеет вид:

$$(4.4) \quad Q^* = (r_1^{out} + c_1^*, \dots, r_m^{out} + c_m^*, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}), \text{ где } c_1^*, \dots, c_m^* \geq 0.$$

Как показывает пример 4.1, в процессе перераспределения ресурса при $W > T$ зона $Z^+(t)$ может сокращаться. Поэтому некоторые из значений c_i^* могут быть нулевыми. Тогда возникают сразу несколько взаимосвязанных

вопросов. Какому условию должен удовлетворять профицит вершины v_k , чтобы она смогла удержаться в зоне Z^+ ? Иначе говоря, можно ли по начальному состоянию определить, какие из c_1^*, \dots, c_m^* (формула (4.4)) будут строго положительными? Можно ли по начальному состоянию без протокола функционирования сети определить предельное состояние, как это было сделано для малых ресурсов? Ответы на поставленные вопросы будут даны в следующем разделе.

4.5. Предельные состояния и потоки при больших ресурсах

4.5.1. Предельное состояние сети при неизменной зоне $Z^+(t)$

Для полных однородных сетей в [83] была сформулирована и доказана теорема, которая позволяет для любого начального состояния при $W > r_{sum}$ определить, какая из вершин, принадлежащих зоне $Z^+(0)$, способна остаться в предельном состоянии в зоне Z^{+*} . Более того, была найдена формула для вычисления предельного состояния во всех вершинах по заданному начальному состоянию. Как и в рассматриваемых сетях, в полной однородной сети каждая вершина является потенциальным аттрактором, и предельное состояние зависит от начального. Но полные однородные сети достаточно сильно отличаются от всех остальных классов сетей. Уже для неполных однородных сетей теорема перестает выполняться. Для определения предельного состояния в эйлеровых сетях нужны иные подходы.

Пусть по-прежнему в зоне $Z^+(0)$ находятся вершины с номерами от 1 до m :

$$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0)).$$

Сформулируем задачу следующим образом.

Какой минимальный профицит должна иметь каждая вершина из $Z^+(0)$, чтобы в процессе функционирования сети не перейти в зону $Z(t)$. Иными словами, как должны быть распределены в зоне $Z^+(0)$ излишки ресурса сверх

пропускных способностей $r_1^{out}, \dots, r_m^{out}$ (профициты вершин), чтобы вершины v_1, \dots, v_m на каждом такте оставались в зоне $Z^+(t)$, если $W = T = r_{sum}$.

Обозначим соответствующий профицит для каждой вершины через $\tilde{c}_1^m, \dots, \tilde{c}_m^m$ (поскольку эти значения пороговые, такая нотация продолжает традицию обозначения пороговых величин).

Ясно, что, поскольку $W = T$, выполняется соотношение:

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^m \tilde{c}_j^m = d_{sum}(0).$$

Причем, очевидно, что если оставить весь вектор начального состояния неизменным, а в некоторую вершину из $Z^+(0)$ поместить дополнительный ресурс, то при любом $c_i(0) > \tilde{c}_i^m$ ($i \leq m$) в предельном состоянии профицит этой вершины будет равен $c_i^* = c_i(0) - \tilde{c}_i^m$.

Из этих соображений $\tilde{c}_1^m, \dots, \tilde{c}_m^m$ можно найти как разность:

$$\tilde{c}_i^m = q_i(0) - q_i^* \text{ при достаточно больших значениях } q_i(0). \text{ В самом деле,}$$

$$q_i(0) - q_i^* = r_i^{out} + c_i(0) - (r_i^{out} + c_i^*) = c_i(0) - c_i^* = \tilde{c}_i^m.$$

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что если в какую-нибудь вершину из $Z^+(0)$ в начальном состоянии поместить дополнительный ресурс: $c_k(0) = \tilde{c}_k^m + \Delta c_k(0)$ ($k \leq m$), то во всех остальных вершинах, принадлежащих зоне $Z^+(0)$, значение \tilde{c}_i^m останется неизменным. В самом деле, все эти вершины на протяжении всего функционирования сети отдают ресурс по правилу 1, т.е. при любом увеличении начального ресурса, увеличения его отдачи не происходит. Излишки остаются в вершине.

Сформулируем ряд утверждений относительно предельного состояния эйлеровых сетей при больших ресурсах.

Л е м м а 4.1. Пусть в эйлеровой сети при $W > T$ в начальном состоянии зоне $Z^+(0)$ принадлежит m вершин с номерами $1, \dots, m$:

$$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0)),$$

Для того, чтобы каждая из вершин $v_i, i = 1, \dots, m$, осталась в зоне $Z^+(t)$ при $t > 0$ необходимо и достаточно выполнение неравенства:

$$(4.6) \quad c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m,$$

где \tilde{c}_i^m – компоненты вектора \tilde{C}^m :

$$(4.7) \quad \tilde{C}^m = Q_m(0) - Q_m^*,$$

а индуцированный вектор начального состояния $Q_m(0)$ находится по формуле: $Q_m(0) = Q(0) + (d_{sum}(0), \dots, d_{sum}(0), 0, \dots, 0)$. Во втором слагаемом значению $d_{sum}(0)$ равны первые m компонент вектора. Q_m^* – соответственно вектор предельного состояния при начальном состоянии $Q_m(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Условие того, что вершина, принадлежащая зоне $Z^+(0)$, не покинет ее, ищется в предположении, что зона $Z^+(t)$ стационарна, т.е. неравенство $c_i(t) \geq \tilde{c}_i^m$ при $t \geq 0$ выполняется для всех $v_i, i = 1, \dots, m$. Чтобы добиться этого, в каждую вершину из $Z^+(0)$ добавляется заведомо большой ресурс, равный суммарному дефициту. Все излишки ресурса в вершинах, помимо \tilde{c}_i^m , нивелируются в разности $Q_m(0) - Q_m^*$, поэтому величина добавляемого ресурса в вершины $v_i \in Z^+(0)$, не влияет на \tilde{c}_i^m , при условии, что в этих вершинах на протяжении функционирования сети не происходит смены правила. \square

С л е д с т в и е 4.4. В эйлеровой сети при $W > T$ для каждого начального состояния $Q(0)$ справедливо: $v_i \in Z^{+*} \Rightarrow c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m$, где \tilde{C}^m находится по формуле (4.7). Обратное верно если и только если все вершины из $Z^+(0)$ одновременно удовлетворяют условию (4.6).

С л е д с т в и е 4.5. Если в эйлеровой сети с начальным состоянием $Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0))$ при $W > T$ для всех вершин $v_i \in Z^+(0)$ выполняется $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m$, то вектор предельного состояния имеет вид

$$(4.8) \quad Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}) = Q(0) - \tilde{C}^m,$$

где вектор \tilde{C}^m определяется по формуле (4.7).

Таким образом, \tilde{C}^m однозначно определяет предельное состояние при выполнении условия (4.6) для всех вершин из $Z^+(0)$.

Доказательства следствий вытекают непосредственно из леммы 4.1.

Кроме того, очевидно, что сумма $(n - m)$ последних компонент вектора \tilde{C}^m отрицательна и равна по модулю суммарному дефициту в начальный момент времени.

$$\sum_{j=m+1}^n \tilde{c}_j^m = -d_{sum}(0).$$

Совмещая эту формулу с формулой (4.5), имеем:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^m = 0.$$

Обобщим полученные результаты на случай произвольных значений профитов (не обязательного выполнения условия $c_k(0) \geq \tilde{c}_k^m$).

4.5.2. Предельное состояние эйлеровой сети. Общий случай

Пусть нумерация вершин в сети такова, что первые m вершин упорядочены по убыванию отношения $\beta_i = \frac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$, причем значения β_i могут быть как больше либо равны единице, так и меньше нее.

Если $\beta_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, предельное состояние однозначно определяется по формуле (4.8).

Пусть существует l : $1 < l < m$, такое, что

$$(4.9) \quad \beta_j = \frac{c_j(0)}{\tilde{c}_j^m} < 1, \quad j = l+1, \dots, m.$$

Поскольку для этих вершин $c_j(0) < \tilde{c}_j^m$, им недостает ресурса, чтобы удержаться в зоне $Z^+(t)$, и они за конечное число тактов перейдут в зону $Z^-(t)$. Недостача ресурса в вершинах v_{l+1}, \dots, v_m для покрытия дефицита,

равная $\sum_{j=l+1}^m (\tilde{c}_j^m - c_j(0))$, должна перераспределиться между остальными вершинами из $Z^+(0)$. Поэтому при условии (4.9) если для некоторой вершины $v_i \in Z^+(0)$ выполняется соотношение (4.6), это не гарантирует того, что она останется в Z^{+*} : в процессе перераспределения ей придется отдавать дополнительный ресурс.

Первой покинет зону $Z^+(t)$ вершина с номером m , для которой отношение (4.9) минимально. Если для нескольких последних вершин $m - k$, $m - k + 1, \dots, m$ отношение (4.9) одинаково, они покинут зону $Z^+(t)$ одновременно. Обозначим через $l = m - k - 1$ новую мощность зоны $Z^+(t)$. Теперь для каждой вершины $v_i \in Z^+(0)$, $i \leq l$, чтобы проверить, будет ли выполнено условие $v_i \in Z^{+*}$, необходимо сформировать новый вектор \tilde{C}^l . Вектор начального состояния для его вычисления будет:

$$Q_l(0) = (r_1^{out} + c_1(0) + d_{sum}(0), \dots, r_l^{out} + c_l(0) + d_{sum}(0), q_{l+1}(0), \dots, q_n(0))$$

Теперь дефицит $d_{sum}(0)$ прибавится к первым l вершинам – только тем, для которых выполняется (4.6).

Затем, для новых значений $\tilde{c}_i^l > \tilde{c}_i^m$, $i = 1, \dots, l$, снова проверяется условие, аналогичное (4.6): $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^l$, $i = 1, \dots, l$.

Процесс повторяется до тех пор, пока при каком-нибудь значении $p \leq l$ неравенство $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^p$, будет истинным для всех $i = 1, \dots, p$.

После этого предельное состояние найдено.

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^p, \dots, r_p^{out} + c_p(0) - \tilde{c}_p^p, r_{p+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

Алгоритм нахождения предельного состояния

Шаг 0. Вычислить \tilde{C}^m по формуле (4.7).

Шаг 1. Вычислить $c_i(0) - \tilde{c}_i^m$, $i = 1, \dots, m$. Если все разности неотрицательны, предельное состояние найдено (формула (4.8)). Выход.

Шаг 2. Упорядочить вершины по убыванию значения $\beta_i = \frac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$.

Шаг 3. $m := m - k - 1$, где k – количество вершин, для которых $\beta_i = \min_j \frac{c_j(0)}{\tilde{c}_j^m}$; переход на шаг 0.

Поскольку $W > T$, как минимум одна вершина останется в зоне Z^{+*} , и следовательно алгоритм остановится за число шагов, не превышающее $m - 1$. В результате вектор

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out})$$

будет предельным состоянием сети.

Сформулируем теорему, обобщающую теорему 4 [83], в которой был получен результат для полных однородных сетей.

Теорема 4.2. Пусть в эйлеровой сети при $W > T$ с произвольным начальным состоянием

$$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0)) \quad \text{первые } m$$

вершин упорядочены по убыванию значения $\beta_i = \frac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$. Тогда предельное

состояние находится по формуле:

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^p, \dots, r_p^{out} + c_p(0) - \tilde{c}_p^p, r_{p+1}^{out}, \dots, r_n^{out}),$$

где $\tilde{C}^p = Q_p(0) - Q_p^*$ и

$p = m$, если $c_i(0) \geq \tilde{c}_i$, $i = 1, \dots, m$;

в противном случае $p < m$ – наибольшее целое, такое, что

$$c_i(0) \geq \tilde{c}_i^p, \quad i = 1, \dots, p.$$

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из алгоритма построения предельного состояния.

4.5.3. Предельные потоки при $W > T$ и задача нахождения вектора \tilde{C}^m (случай отсутствия ресурса в зоне $Z(0)$)

Теорема 4.2 позволяет исследовать начальные состояния и находить по ним предельные, но для этого необходимо вычислять дополнительные предельные состояния, заведомо предсказуемые.

Возникает вопрос, нельзя ли найти компоненты вектора \tilde{C}^m , не прибегая к расчету Q_m^* . Для ответа на него проследим изменение ресурса в вершине $v_k \in Z^+(0)$ ($k \leq m$) при неизменной зоне $Z^+(t)$. Эта вершина функционирует по правилу 1. На каждом такте она отдает по полной пропускной способности r_k^{out} .

Принимаемый ресурс равен входному потоку и рассчитывается по формуле:

$f_k^{in}(t+1) = (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}, q_{m+1}(t), \dots, q_n(t))R'_k$, где R'_k – k -й столбец стохастической матрицы R' .

Вектор входящих потоков во все вершины, определяется как

$$F^{in}(t+1) = (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}, q_{m+1}(t), \dots, q_n(t))R'.$$

Вектор, на который умножается стохастическая матрица, есть вектор выходного потока. Отсюда

$$(4.10) \quad F^{in}(t+1) = F^{out}(t)R'.$$

Выразим зависимость потоков на произвольном такте от начального состояния.

$$\begin{aligned} F^{out}(t+1) &= (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}, q_{m+1}(t+1), \dots, q_n(t+1)) = \\ &= (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}, q_{m+1}(t), \dots, q_n(t))P = F^{out}(t)P, \end{aligned}$$

где P – матрица, полученная из R' заменой первых m столбцов на столбцы ортонормированного базиса e_1, \dots, e_m . Ее можно представить в виде блочной матрицы:

$P = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' \\ \hline O & R_2' \end{array} \right)$, где E_1 – единичная матрица размера $m \times m$, O – нулевая

матрица $(n-m) \times m$, $R_{1,2}'$ – соответствующие блоки стохастической матрицы размеров $m \times (n-m)$ и $(n-m) \times (n-m)$ соответственно.

R_1' характеризует пропускные способности ребер между зонами $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$, R_2' отвечает за обмен ресурсом внутри $Z^-(t)$.

Для любого натурального h выполнится:

$$F^{out}(t+h) = F^{out}(t)P^h.$$

$$F^{out}(t) = F^{out}(0)P^t.$$

Тогда (4.10) перепишется в виде:

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(0)P^t R'.$$

Непосредственно возводя матрицу P в степень t , получим:

$$P^t = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' + R_1' R_2'^t + R_1' (R_2')^{2t} + \dots + R_1' (R_2')^{(t-1)} \\ \hline O & (R_2')^t \end{array} \right)$$

В [75, 112] доказано, что для матриц такого вида $(R_2')^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, кроме того, существует матрица $(E_2 - R_2')^{-1}$, где E_2 – единичная матрица размера $(n-m) \times (n-m)$, и $\sum_{k=0}^{\infty} (R_2')^k = (E_2 - R_2')^{-1}$. Тогда:

$$R_1' + R_1' R_2'^t + R_1' (R_2')^{2t} + \dots + R_1' (R_2')^{kt} + \dots = R_1' (E_2 - R_2')^{-1},$$
 и матрица P^∞ имеет

вид:

$$(4.11) \quad P^\infty = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' (E_2 - R_2')^{-1} \\ \hline O & O \end{array} \right).$$

Из (4.11) и существования предельного потока следует:

$$(4.12) \quad F^{in*} = F^{out*} = F^{out}(0)P^\infty R' = F^{out}(0) \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1' (E_2 - R_2')^{-1} \\ \hline O & O \end{array} \right) R'$$

Из формулы (4.12) видно, что вектор предельного потока зависит только от m первых компонент вектора потока в начальном состоянии.

«Физический смысл» здесь достаточно очевиден. Суммарный предельный поток при $W > T$ равен пороговому значению T , которое зависит только от характеристик самой сети и не зависит от начального состояния. Для первых m компонент вектора $F^{out}(0)$ выполняется $f_i^{out} = r_i^{out}$, $i = 1, \dots, m$, т.е. они выражаются через параметры сети. С их помощью рассчитываются остальные компоненты вектора предельного потока.

Поскольку при $W > T$ предельный поток известен и совпадает с предельным состоянием при $W = T$: $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$, из (4.12) имеем:

$$F^{out}(0) \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'(E_2 - R_2')^{-1} \\ \hline O & O \end{array} \right) R' = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

Вектор $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$ является левым собственным вектором матрицы R' с собственным числом $\lambda = 1$. Кроме того, поскольку $\lambda = 1$ – собственное значение кратности 1, соответствующий ему собственный вектор единствен. Следовательно, справедливо равенство

$$(4.13) \quad F^{out}(0) \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'(E_2 - R_2')^{-1} \\ \hline O & O \end{array} \right) = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out})$$

При этом, как уже было отмечено, вклад вектора $F^{out}(0)$ в левую часть (4.13) состоит только из m первых компонент.

Таким образом, можно переписать (4.13) в виде:

$$(r_1^{out}, \dots, r_m^{out}, 0, \dots, 0) \left(\begin{array}{c|c} E_1 & R_1'(E_2 - R_2')^{-1} \\ \hline O & O \end{array} \right) = (r_1^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

Отсюда для эйлеровых сетей получается следующее равенство:

$$(4.14) \quad (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}) \left(R_1'(E_2 - R_2')^{-1} \right) = (r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

$\left(R_1'(E_2 - R_2')^{-1} \right)$ – матрица связи первых m компонент вектора суммарных пропускных способностей с последними $(n - m)$ компонентами. Обозначим ее через R^c , а векторы пропускных способностей с m и $(n - m)$ компонентами через R_m^{out} и R_{n-m}^{out} соответственно. Тогда (4.14) переписывается в виде:

$$R_m^{out} R^c = R_{n-m}^{out}.$$

Вклад i -й компоненты вектора R_m^{out} ($i = 1, \dots, m$) во все компоненты вектора R_{n-m}^{out} равен $r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c$ – пропускная способность i -й вершины умножается на сумму элементов i -й строки матрицы R^c .

Пусть вершины, находящиеся в зоне $Z(0)$, не имели ресурса, то есть,

$$d_{sum}(0) = \sum_{j=m+1}^n r_j^{out}.$$

Тогда каждая вершина v_i ($i = 1, \dots, m$) должна отдать ровно $r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c$ ресурса. Отсюда первые m компонент вектора $\tilde{C}^m = Q_m(0) - Q_m^*$, задающие минимальное количество ресурса сверх пропускной способности, при котором вершина остается в зоне $Z^+(t)$, рассчитываются по формуле:

$$\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c, \quad i=1, \dots, m.$$

Таким образом, доказана лемма, позволяющая находить предельное состояние в случае, когда вершина из зоны $Z(0)$ не содержат ресурса.

Л е м м а 4.2. В эйлеровой сети с начальным состоянием

$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), 0, \dots, 0)$ при $W > T$ минимальные значения \tilde{c}_i^m , $i = 1, \dots, m$, при которых вершины из зоны $Z^+(0)$ не перейдут в зону $Z(t)$, рассчитываются по формуле:

$$(4.15) \quad \tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c, \quad i=1, \dots, m, \quad \text{где } R^c = \left(R_1' (E_2 - R_2')^{-1} \right),$$

а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m \quad \forall i = 1, \dots, m$, описывается вектором:

$$Q^* = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out} \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает непосредственно из вычисления предельных потоков и построения матрицы P^∞ .

Формула (4.15) позволяет оценивать начальное состояние и находить по нему предельное состояние, не вводя вспомогательные векторы, как это было сделано в п.п. 4.5.1-4.5.2.

Продемонстрируем на примере вычисление величин \tilde{c}_i^m .

Пример 4.4. Рассмотрим симметричную сеть с пятью вершинами. Ее матрица пропускных способностей имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кортеж $\rho = ((10, 10), (5, 5), (10, 10), (5, 5), (5, 5))$. $r_{sum} = 35$.

Начальное состояние: $Q(0) = (50, 50, 0, 0, 0)$. $W = 100$.

При таком начальном состоянии $Z^+(0) = \{v_1, v_2\}$, $Z^-(0) = \{v_3, v_4, v_5\}$.

Ресурс в первых двух вершинах достаточно велик, чтобы ни одна из них не перешла в зону $Z^-(t)$.

Численный эксперимент показывает, что предельное состояние при таком начальном будет: $Q^* = (36, 44, 10, 5, 5)$.

Таким образом, $\tilde{c}_1^m = 50 - 36 = 14$, $\tilde{c}_2^m = 50 - 44 = 6$.

Стохастическая матрица R' и матрица P имеют вид:

$$R' = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad P = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{array} \right), \text{ отсюда}$$

$$R'_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad R'_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Произведем промежуточные вычисления:

$$E_2 - R_2' = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, (E_2 - R_2')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix},$$

$$R^c = (R_1'(E_2 - R_2')^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение формулы (4.14):

$$(10, 5) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = (10, 5, 5). \text{ Равенство выполняется.}$$

По формуле (4.15) посчитаем пороговые значения $\tilde{c}_{1,2}^m$.

$$\tilde{c}_1^m = 10 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \right) = 10 \cdot \frac{14}{10} = 14;$$

$$\tilde{c}_2^m = 5 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \right) = 5 \cdot \frac{6}{5} = 6.$$

Эти значения совпадают с полученными в начале примера численно.

Таким образом, из теоремы 4.4 следует, что при $W > T$ если вершины из зоны $Z(0)$ в начальном состоянии не имеют ресурса, а ресурс во всех вершинах зоны $Z^+(0)$ достаточно велик, предельное состояние можно найти по формуле (4.15), не прибегая к вычислениям собственного вектора стохастической матрицы. Теорема задает достаточное условие возможности нахождения предельного состояния: профициты вершин из зоны $Z^+(0)$ должны превышать соответствующие пороговые значения \tilde{c}_i^m .

Полученные результаты касаются достаточно узкого класса начальных состояний, однако, базируясь на именно этих результатах, можно произвести обобщение на остальные классы начальных состояний. Сначала рассмотрим начальные состояния с произвольным ресурсом в зоне $Z(0)$, при

стационарной зоне $Z^+(t)$ (п. 4.5.4), а затем произвольные начальные состояния (п. 4.5.5).

4.5.4. Задача нахождения вектора \tilde{C}^m (случай стационарной зоны $Z^+(t)$)

Рассмотрим начальное состояние с ненулевым ресурсом в вершинах из зоны $Z(0)$. Пусть вектор начального состояния задан в виде:

$$Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0)),$$

и существует по крайней мере одна вершина $v_j, j = m+1, \dots, n$, содержащая в начальном состоянии ненулевое количество ресурса: $d_j(0) < r_j^{out}$. Недостаток ресурса в вершинах из зоны $Z(0)$ уже не так велик: вместо вектора правой части равенства (4.14) $(r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out})$, нужно получить не превышающий его вектор $(d_{m+1}(0), \dots, d_n(0))$. Разность этих двух векторов совпадает с компонентами вектора начального состояния вершин из зоны $Z(0)$: $(r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0))$.

Введем для каждой вершины $v_j \in Z(0)$ коэффициент $\alpha_j \leq 1$:

$$\alpha_j = \frac{d_j(0)}{r_j^{out}}.$$

Тогда вектор дефицитов может быть представлен в виде:

$$(d_{m+1}(0), \dots, d_n(0)) = (\alpha_{m+1} r_{m+1}^{out}, \dots, \alpha_n r_n^{out}) = (r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}) \text{Diag}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n),$$

где $\text{Diag}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ – диагональная матрица с элементами $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$.

Отсюда, чтобы получить вектор, каждая компонента которого равна дефициту данной вершины, выражение (4.14) модифицируется следующим образом:

$$(4.16) \quad (r_1^{out}, \dots, r_m^{out}) R^c \text{Diag}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = (d_{m+1}(0), \dots, d_n(0))$$

Из (4.16) легко получить, что для случая, когда вершины зоны $Z(0)$ содержат ресурс, выражение (4.15) для минимальных излишков ресурса в вершинах из $Z^+(0)$ примет вид:

$$(4.17) \quad \tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}, \quad i=1, \dots, m.$$

Формула (4.17) для каждого начального состояния эйлеровой сети задает минимальные излишки в каждой вершине из зоны $Z^+(0)$, которые позволят этой вершине остаться в зоне $Z^+(t)$ при любом значении t . И, как и в случае с отсутствием ресурса в зоне $Z(t)$, выполнение неравенства $c_j(0) \geq \tilde{c}_i^m$ для всех вершин из $Z^+(0)$ является достаточным условием применимости данного метода к вычислению предельного состояния. Если это неравенство выполняется, вектор предельного состояния получается из начального состояния следующим образом:

$$Q^* = Q(0) - \tilde{C}^m = Q(0) - (\tilde{c}_1^m, \dots, \tilde{c}_m^m, -d_{m+1}(0), \dots, -d_n(0)), \text{ или}$$

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

Таким образом, доказана теорема о предельном состоянии при стационарной зоне $Z^+(t)$.

Теорема 4.3. В эйлеровой сети с произвольным начальным состоянием $Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0))$ при $W > T$ минимальные значения \tilde{c}_i^m , $i=1, \dots, m$, при которых вершины из зоны $Z^+(0)$ не перейдут в зону $Z(t)$, рассчитываются по формуле:

$$(4.18) \quad \tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}, \quad i=1, \dots, m, \text{ где } \alpha_k = \frac{d_k(0)}{r_k^{out}}, \quad k = m+1, \dots, n,$$

а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m \quad \forall i = 1, \dots, m$, описывается вектором:

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно заметить, что когда вершины из зоны $Z(0)$ не содержат ресурса, значения α_i для них равны единице, и формула (4.18) превращается в формулу (4.15).

Продемонстрируем применение полученных формул на примере.

Пример 4.5. По-прежнему будем рассматривать симметричную сеть с матрицей R из примера 4.4. Пусть снова в начальном состоянии $Z^+(0) = \{v_1, v_2\}$, $Z^-(0) = \{v_3, v_4, v_5\}$. Однако теперь вершины из зоны $Z^-(0)$ имеют ненулевой ресурс. Начальное состояние: $Q(0) = (50, 50, 3, 2, 1)$. $W = 106$. Теперь помимо матрицы связи $R^c = (R_1'(E_2 - R_2')^{-1})$, которая совпадает с матрицей связи, полученной в примере 4.4, для вычисления вектора дефицита, и, соответственно, вектора пороговых профицитов, нужно вычислить матрицу $\text{Diag}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$.

$$\alpha_3 = \frac{10-3}{10} = \frac{7}{10}, \quad \alpha_4 = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}, \quad \alpha_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

Проверим выполнение формулы (4.16):

$$(10, 5) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{2} & \frac{10}{2} & \frac{10}{2} \\ \frac{5}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = (7, 3, 4). \text{ Равенство выполняется.}$$

$$\begin{aligned} R^c \cdot \text{Diag}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{2} & \frac{10}{2} & \frac{10}{2} \\ \frac{5}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{50} & \frac{9}{50} & \frac{12}{50} \\ \frac{50}{50} & \frac{50}{50} & \frac{50}{50} \\ \frac{14}{50} & \frac{12}{50} & \frac{16}{50} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,56 & 0,18 & 0,24 \\ 0,28 & 0,24 & 0,32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пороговые значения $\tilde{c}_{1,2}^m$ рассчитываются как произведение выходной пропускной способности вершины на сумму соответствующей строки матрицы $R^c \cdot \text{Diag}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$.

$$\tilde{c}_1^m = 10 \cdot (0,56 + 0,18 + 0,24) = 10 \cdot 0,98 = 9,8;$$

$$\tilde{c}_2^m = 5 \cdot (0,28 + 0,24 + 0,32) = 5 \cdot 0,84 = 4,2.$$

Предельное состояние тогда будет равно:

$$Q^* = (40,2, 45,8, 10, 5, 5).$$

Протокол работы сети с этим начальным состоянием приведен в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	50,000	50,000	3,000	2,000	1,000
1	44,400	47,900	7,900	2,900	2,900
2	42,300	46,850	8,950	3,950	3,950
3	41,250	46,325	9,475	4,475	4,475
4	40,725	46,063	9,738	4,738	4,738
5	40,463	45,931	9,869	4,869	4,869
6	40,331	45,866	9,934	4,934	4,934
7	40,266	45,833	9,967	4,967	4,967
8	40,233	45,816	9,984	4,984	4,984
9	40,216	45,808	9,992	4,992	4,992
10	40,208	45,804	9,996	4,996	4,996
11	40,204	45,802	9,998	4,998	4,998
12	40,202	45,801	9,999	4,999	4,999
13	40,201	45,801	9,999	4,999	4,999
14	40,201	45,800	10,000	5,000	5,000
15	40,200	45,800	10,000	5,000	5,000
...					

Как видно из таблицы, значения, полученные численно, совпадают с вектором предельного состояния, полученным аналитически.

4.5.5. Задача нахождения вектора \tilde{C}^m (общий случай)

Следующий результат, который необходимо получить, – описание вектора предельного состояния при произвольных ресурсах в зоне $Z^+(0)$, т.е. найти предельное состояние вне зависимости от того, остается зона $Z^+(t)$ стационарной на протяжении всего функционирования сети или сужается. Аналогично рекурсивному алгоритму из п. 4.5.2, опишем последовательность действий для нахождения предельного состояния при условии, что не все $c_i(0)$ превосходят пороговые значения \tilde{c}_i^m .

Алгоритм нахождения предельного состояния при нестабильной зоне $Z^+(t)$ включает в себя следующие шаги.

1. Рассчитать пороговые значения \tilde{c}_i^m .

2. Выбрать вершину в $Z^+(0)$, которая первой покинет $Z^+(t)$. Возможна ситуация, когда несколько вершин покидают зону $Z^+(t)$ одновременно. Порядок действия для этого случая аналогичен.
3. Перераспределить ее излишек сверх выходной пропускной способности между вершинами из зоны $Z(0)$. Если таких вершин несколько, перераспределить все их излишки.
4. Пропорционально уменьшить ресурс в остальных вершинах зоны $Z^+(0)$. (Поскольку взята вершина, первой покидающая эту зону, ни одна из вершин не окажется в $Z(t)$ – как максимум, на границе вместе с рассматриваемой вершиной).
5. Пересчитать значения \tilde{c}_i^l для нового начального состояния с редуцированной зоной $Z^+(0)$.
6. Если для всех вершин выполнится неравенство $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^l$, зона $Z^+(0)$ стабилизировалась. Мы попадаем в условия теоремы 4.5. Выход
7. Если существует по крайней мере одна вершина, для которой $c_i(0) < \tilde{c}_i^l$, $m := l$; переход на шаг 1.

Опишем один проход этого алгоритма.

Расположим вершины в таком порядке, что первые m вершин упорядочены по убыванию отношения $\beta_i = \frac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$, причем как минимум одно из этих отношений строго меньше единицы.

Рассмотрим вершину v_m . Для нее значение $\beta_m = \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m}$ минимально, причем $\beta_m < 1$. Будем рассматривать случай, когда минимум β_i достигается в одной вершине. Рассуждения для случая, когда таких вершин несколько, аналогичны.

Для всех β_i , $i = 1, \dots, m-1$, выполнится: $\beta_i > \beta_m$, поэтому для любого $c_i(0)$, $i = 1, \dots, m-1$, $c_i(0) > \beta_m \tilde{c}_i^m$, т.е. если ресурс любой другой вершины из $v_i \in Z^+(0)$ уменьшить на значение $\beta_m \tilde{c}_i^m$, она останется в $Z^+(t)$.

Пока вершина v_m будет отдавать весь имеющийся у нее излишек, каждая вершина $v_i \in Z^+(0)$ отдаст количество ресурса, равное $\beta_m \tilde{c}_i^m$, и, как уже было показано, не покинет $Z^+(t)$.

Обозначим матрицу $R^c \cdot \text{Diag}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ через R^{c1} . Вершина $v_i \in Z^+(0)$ отдает в вершину $v_k \in Z^-(0)$ следующую долю от общего отдаваемого ресурса $\frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}}$. Сам отдаваемый ресурс равен величине $\beta_m \tilde{c}_i^m$.

Таким образом, в каждую вершину $v_k \in Z^-(0)$ из вершины $v_i \in Z^+(0)$ перейдет

$$\frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \beta_m \tilde{c}_i^m = \frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \frac{\tilde{c}_i^m}{\tilde{c}_m^m} c_m(0) \text{ ресурса.}$$

Из всех вершин зоны $Z^+(0)$ в вершину $v_k \in Z^-(0)$, соответственно, перейдет:

$$\sum_{i=1}^m \frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \frac{\tilde{c}_i^m}{\tilde{c}_m^m} c_m(0) = \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^m \frac{r_{ik}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \text{ ресурса.}$$

Новый вектор начального состояния будет, соответственно, равен:

$$Q_{new}(0) = \left(r_1^{out} + c_1(0) - \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \tilde{c}_1^m, \dots, r_{m-1}^{out} + c_{m-1}(0) - \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \tilde{c}_{m-1}^m, r_m^{out}, \right. \\ \left. r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0) + \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^m \frac{r_{im+1}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m, \dots, r_n^{out} - d_n(0) + \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m} \sum_{i=1}^m \frac{r_{in}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \right).$$

Для вектора $Q_{new}(0)$, в котором область $Z^+(0)$ будет содержать l вершин (как максимум, $m-1$ вершину), находятся новые значения \tilde{c}_i^l , после чего либо начальное состояние удовлетворяет условию теоремы 4.4, либо вся процедура повторяется заново.

Предложенный алгоритм позволяет обобщить все предыдущие результаты в единую теорему о предельном состоянии.

Теорема 4.4 (о предельном состоянии). Пусть в регулярной эйлеровой сети с произвольным начальным состоянием при $W > T$ $Q(0) = (r_1^{out} + c_1(0), \dots, r_m^{out} + c_m(0), r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0), \dots, r_n^{out} - d_n(0))$ первые m вершин упорядочены по убыванию отношения $\beta_i = \frac{c_i(0)}{\tilde{c}_i^m}$.

Минимальные значения \tilde{c}_i^m , $i = 1, \dots, m$, при которых вершины из зоны $Z^+(0)$ не перейдут в зону $Z(t)$, рассчитываются по формуле:

$$\tilde{c}_i^m = r_i^{out} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^c \alpha_{m+j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{где } \alpha_{m+j} = \frac{d_{m+j}(0)}{r_{m+j}^{out}}, \quad j = 1, \dots, n-m,$$

а предельное состояние при условии, что $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m \quad \forall i = 1, \dots, m$, описывается вектором:

$$(4.19) \quad Q^* = (r_1^{out} + c_1(0) - \tilde{c}_1^m, \dots, r_m^{out} + c_m(0) - \tilde{c}_m^m, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

Если для вершины $v_m \in Z^+(0)$ $c_m(0) < \tilde{c}_m^m$, значение m уменьшается на k , и за новое начальное состояние принимается вектор:

$$(4.20) \quad Q_{new}(0) = (r_1^{out} + c_1(0) - \beta_m \tilde{c}_1^m, \dots, r_{m-k}^{out} + c_{m-k}(0) - \beta_m \tilde{c}_{m-k}^m, r_{m-k+1}^{out}, \dots, r_m^{out},$$

$$\left. \begin{array}{l} r_{m+1}^{out} - d_{m+1}(0) + \beta_m \sum_{i=1}^m \frac{r_{im+1}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m, \dots, r_n^{out} - d_n(0) + \beta_m \sum_{i=1}^m \frac{r_{in}^{c1}}{\sum_{j=1}^{n-m} r_{ij}^{c1}} \tilde{c}_i^m \end{array} \right\}, \text{ где}$$

$\beta_m = \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m}$, а значение k равно количеству вершин, для которых

$$\beta_{m-k+1} = \dots = \beta_m.$$

Начальное состояние пересчитывается до тех пор, пока все разности $c_i(0) - \tilde{c}_i^m$ не станут неотрицательными.

Предельное состояние описывается формулой (4.20).

Доказательство вытекает из построения нового вектора начального состояния $Q_{new}(0)$.

Для иллюстрации теоремы и алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример 4.6. Модифицируем матрицу из примера 4.4.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь кортеж $\rho = ((15, 15), (5, 5), (10, 10), (10, 10), (5,5))$. $r_{sum} = 45$.

Зададим начальное состояние, в котором в зоне $Z^+(0)$ будут три первые вершины $Z^+(0) = \{v_1, v_2, v_3\}$, а ресурсы четвертой и пятой вершин меньше выходных пропускных способностей. Пусть они оба равны 2: $Q(0) = (15 + c_1(0), 5 + c_2(0), 10 + c_3(0), 2, 2)$. Рассмотрим случай нестабильной зоны $Z^+(t)$. Пусть для двух первых вершин выполняется: $c_i(0) \geq \tilde{c}_i^m$ $i = 1, 2$, а для третьей вершины $c_3(0) < \tilde{c}_3^m$. Чтобы задать такое начальное состояние, по теореме 4.4. вычислим пороговые значения \tilde{c}_i^m .

Для этого найдем матрицу связи R^c и диагональную матрицу $\text{Diag}(\alpha_4, \alpha_5)$.

Стохастическая матрица R' и матрица P имеют вид:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{6}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad P = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right), \text{отсюда}$$

$$R_1' = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, R_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$E_2 - R_2' = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}, (E_2 - R_2')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix},$$

$$R^c = \left(R_1' (E_2 - R_2')^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\text{Diag}(\alpha_4, \alpha_5)$:

$$\alpha_4 = \frac{10-2}{10} = \frac{4}{5}, \alpha_5 = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$R^c \cdot \text{Diag}(\alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{3}{35} \\ \frac{8}{35} & \frac{6}{35} \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{35} \end{pmatrix}$$

Проверим, выполняется ли равенство (4.16).

$$(15, 5, 10) \begin{pmatrix} \frac{8}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{21}{35} & \frac{6}{35} \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{35} \end{pmatrix} = (8, 3). \quad \text{Справа получили значение дефицита}$$

вершин из зоны $Z(0)$.

По формуле (4.17) посчитаем пороговые значения $\tilde{c}_i^m, i = 1, 2, 3$.

$$\tilde{c}_1^m = 15 \cdot \left(\frac{8}{21} + \frac{3}{35} \right) = 7;$$

$$\tilde{c}_2^m = 5 \cdot \left(\frac{8}{35} + \frac{6}{35} \right) = 2;$$

$$\tilde{c}_3^m = 10 \cdot \left(\frac{4}{35} + \frac{3}{35} \right) = 2.$$

Теперь получены все данные, чтобы задать начальное состояние, порождающее нестабильную зону $Z^+(t)$. Ресурс в первых двух вершинах пусть по-прежнему будет равен 50 (т.е. величине, заведомо большой), а ресурс в третьей вершине: $q_3(0)=11$, поскольку $r_3^{out} + \tilde{c}_3^m = 10 + 2 = 12$, и для нестабильной зоны $Z^+(t)$ ресурс третьей вершины в начальном состоянии должен попасть в интервал (10, 12). Начальное состояние, таким образом, будет следующим: $Q(0) = (50, 50, 11, 2, 2)$. По формуле $\beta_m = \frac{c_m(0)}{\tilde{c}_m^m}$ для

третьей вершины имеем: $\beta_3 = \frac{1}{2}$. По формуле (4.21) найдем новое начальное состояние, которое переходит в то же самое предельное состояние, но зона $Z^+(0)$ в нем содержит только две вершины, а вершина v_3 имеет ресурс 10, равный своей выходной пропускной способности. Ресурс в первых трех вершинах будет равен:

$$q_1(0) = 50 - \frac{1}{2} \cdot 7 = 46,5;$$

$$q_2(0) = 50 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 49;$$

$$q_3(0) = 10.$$

Найдем новые значения ресурсов в вершинах из зоны $Z(0)$ по формуле (4.20). Для этого нужно вычислить пропорции, в которых вершины v_1, v_2, v_3 распределяют ресурс в вершины v_4, v_5 .

$$\begin{aligned} q_4(0) &= 2 + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{8}{21} : \left(\frac{8}{21} + \frac{3}{35} \right) \right) + 1 \cdot \left(\frac{8}{35} : \left(\frac{8}{35} + \frac{6}{35} \right) \right) + 1 \cdot \left(\frac{4}{35} : \left(\frac{4}{35} + \frac{3}{35} \right) \right) = \\ &= 2 + \frac{20}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{28}{7} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_5(0) &= 2 + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{3}{35} : \left(\frac{8}{21} + \frac{3}{35} \right) \right) + 1 \cdot \left(\frac{6}{35} : \left(\frac{8}{35} + \frac{6}{35} \right) \right) + 1 \cdot \left(\frac{3}{35} : \left(\frac{4}{35} + \frac{3}{35} \right) \right) = \\
&= 2 + \frac{9}{14} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = 2 + \frac{21}{14} = 3,5.
\end{aligned}$$

Новое начальное состояние $Q_{new}(0) = (46,5, 49, 10, 6, 3,5)$.

При этом начальном состоянии зона $Z^+(t)$ уже стабильна, и предельное состояние ищется по формуле (4.19).

Для его нахождения нужно заново определить матрицу R^c и коэффициенты $\alpha_i, i = 3, 4, 5$. Поскольку зона $Z^+(0)$ содержит уже не три, а две вершины, новая матрица P имеет вид:

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right), \text{ тогда}$$

$$R_1' = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad R_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$E_2 - R_2' = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad (E_2 - R_2')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$R^c = \left(R_1' (E_2 - R_2')^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{10-6}{10} = 0,4, \alpha_5 = \frac{5-3.5}{5} = 0,3,$$

$$R^c \cdot \text{Diag}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

По формуле (4.17) посчитаем пороговые значения $\tilde{c}_i^m, i = 1, 2$.

$$\tilde{c}_1^m = 15 \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{15} \right) = \frac{13}{3} = 4, (3);$$

$$\tilde{c}_2^m = 5 \cdot \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{10} \right) = \frac{7}{6} = 1,1(6).$$

Предельное состояние тогда будет:

$$Q^* = (46,5 - 4, (3), 49 - 1,1(6), 10, 10, 5) = (42,1(6), 47,8(3), 10, 10, 5)$$

Проверим полученное значение двумя способами.

Численно получим предельное состояние для исходного начального состояния $Q(0) = (50, 50, 11, 2, 2)$ и для модифицированного (со стабильной зоной $Z^+(t)$) $Q_{new}(0) = (46,5, 49, 10, 6, 3,5)$.

Таблица 4.2. Протокол работы сети $Q(0) = (50, 50, 11, 2, 2)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	50,000	50,000	11,000	2,000	2,000
1	44,600	48,600	9,600	8,600	3,600
2	43,240	48,140	9,540	9,540	4,540
3	42,596	47,956	9,816	9,816	4,816
4	42,338	47,882	9,926	9,926	4,926
5	42,235	47,853	9,971	9,971	4,971
6	42,194	47,841	9,988	9,988	4,988
7	42,178	47,836	9,995	9,995	4,995
8	42,171	47,835	9,998	9,998	4,998
9	42,168	47,834	9,999	9,999	4,999
10	42,167	47,834	10,000	10,000	5,000
11	42,167	47,833	10,000	10,000	5,000
12	42,167	47,833	10,000	10,000	5,000
...					

Таблица 4.3. Протокол работы сети $Q_{new}(0) = (46,5, 49, 10, 6, 3,5)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	46,500	49,000	10,000	6,000	3,500
1	43,800	48,300	9,300	9,300	4,300
2	42,820	48,020	9,720	9,720	4,720
3	42,428	47,908	9,888	9,888	4,888
4	42,271	47,863	9,955	9,955	4,955
5	42,208	47,845	9,982	9,982	4,982
6	42,183	47,838	9,993	9,993	4,993
7	42,173	47,835	9,997	9,997	4,997
8	42,169	47,834	9,999	9,999	4,999
9	42,168	47,834	10,000	10,000	5,000
10	42,167	47,833	10,000	10,000	5,000
11	42,167	47,833	10,000	10,000	5,000
...					

Из двух протоколов видно, что предельные состояния совпали между собой и с найденным аналитически.

Выводы

1. Описаны свойства регулярных эйлеровых сетей, не присущие другим классам сетей.
2. Получены формулы, выражающие пороговое значение T и компоненты вектора предельного состояния при $W = 1$ и $W = T$ только через элементы матрицы R .
3. Доказано существование предельного состояния при любом суммарном ресурсе.
4. Сформулирован и доказан критерий стабильности зоны $Z^+(t)$, когда все вершины, принадлежащие зоне $Z^+(0)$, оказываются в зоне Z^{+*} , т.е. $Z^+(0) = Z^{+*}$.
5. Получены формулы описывающие динамику потока при произвольном начальном состоянии и формулы предельных потоков.
6. При $W > T$ для начальных состояний, в которых вершины из $Z^-(0)$ не содержат ресурса, и зона $Z^+(t)$ стабильна, найдена формула, выражающая зависимость количества ресурса, отдаваемого каждой вершиной из $Z^+(0)$, от элементов матрицы R и элементов матрицы перехода, – прямоугольного

блока предела степеней стохастической матрицы $R^{t^{\infty}}$. Как следствие, найдены все компоненты вектора предельного состояния.

7. При $W > T$ для любого начального состояния, сохраняющего стабильную зону $Z^+(t)$, найдено предельное состояние, выражающееся через предельное состояние из п. 6 и начальные дефициты вершин, принадлежащих зоне $Z(0)$.

8. Задан рекурсивный алгоритм, позволяющий находить предельное состояние по произвольному начальному состоянию при $W > T$.

9. Сформулирована и доказана теорема о предельном состоянии в эйлеровой сети для любого начального состояния при $W > T$.

ГЛАВА 5. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕТИ

В предыдущих главах рассматривались регулярные сети. Свойство регулярности позволило доказать ряд утверждений относительно их функционирования, главное из которых – сходимости процесса распределения ресурса при любом начальном состоянии, а также единственность предельного состояния во всех регулярных сетях при малых ресурсах и в несимметричных сетях с одним аттрактором при любом суммарном ресурсе. Получены формулы для компонент вектора предельного состояния при любых ресурсах в эйлеровых сетях и в несимметричных сетях с одним аттрактором; если аттракторов несколько, предельные значения ресурса найдены для всех не-аттрактивных вершин, найдено пороговое значение T , при превышении которого последовательность векторов состояний перестает описываться однородной регулярной цепью Маркова. Эргодические циклические сети обладают принципиально иными свойствами.

Определение эргодической нерегулярной ресурсной сети было дано в главе 1. Эргодическая нерегулярная сеть является циклической. Это означает, что наибольший общий делитель всех циклов в такой сети больше единицы. Каждая вершина эргодической сети достижима из любой другой вершины, но так как сеть не является регулярной, переходы из некоторого множества вершин в другое множество возможны только за некоторое число тактов, отличное от единицы. Из этого следует, что никакая степень стохастической матрицы, соответствующей матрице пропускных способностей эргодической сети не будет строго положительной. Более того, нули для разных ее степеней будут находиться в разных местах. С увеличением степени расположение нулей начинает циклически повторяться. Длина цикла соответствует количеству тактов, за которое из каждой вершины можно перейти в нее же. Эта длина равна наибольшему общему делителю всех циклов сети.

В эргодической цепи Маркова выделяют циклические классы состояний [75]. С течением времени текущее состояние движется по циклическим классам в определенном порядке, причем каждые d шагов система оказывается в одном и том же циклическом классе. Количество циклических классов d называют периодом цепи; d равно НОД всех циклов цепи. Регулярная цепь Маркова состоит целиком из одного циклического класса, т.е. для регулярной цепи Маркова $d=1$. По аналогии с цепями Маркова будем говорить, что вершины эргодической сети также образуют циклические классы.

По топологии циклические сети могут сильно различаться. Самым простым и наиболее легким для исследования является *элементарный цикл* из n вершин. Он содержит n циклических классов, и при функционировании по правилу 2 на каждом такте ресурс переходит из некоторой вершины в следующую. Пороговое значение для таких сетей и потенциальные аттракторы могут быть найдены лишь исходя из пропускных способностей ребер. Более сложный случай – *простые циклы*. Простой цикл состоит из нескольких циклов, пересекающихся по вершинам, но не пересекающихся по ребрам. Все эти циклы обязаны не быть взаимно простыми. Если НОД длин этих циклов равен единице, сеть состоит из одного циклического класса; она регулярна и для нее выполняются все результаты, полученные для регулярных сетей. Общий случай циклической сети – сеть, состоящая из циклов, пересекающихся по вершинам и ребрам.

5.1. Элементарные циклы и их свойства

Если сеть представляет собой элементарный цикл, ее матрица имеет по одному ненулевому элементу в каждой строке и каждом столбце, поскольку все вершины имеют по одному входному и одному выходному ребру. Далее в этом разделе под «циклом» будем подразумевать элементарный цикл. Стохастическая матрица при любых пропускных способностях ребер цикла у

такой сети одна и та же: она содержит ровно по одной единице в каждом столбце и каждой строке.

Рассмотрим сеть из пяти вершин, образующих цикл, с произвольной матрицей пропускных способностей

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{45} \\ r_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая ей стохастическая матрица будет иметь вид:

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем все ее степени:

$$(R')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (R')^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (R')^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(R')^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad (R')^5 = R'E = R'.$$

Пусть суммарный ресурс и начальное состояние сети таковы, что она с первого такта функционирует по правилу 2. Тогда на каждом такте вектор состояния сети будет циклической перестановкой вектора начального состояния.

$$Q(0) = (q_1(0), q_2(0), q_3(0), q_4(0), q_5(0));$$

$$Q(1) = Q(0)R' = (q_5(0), q_1(0), q_2(0), q_3(0), q_4(0));$$

$$Q(2) = Q(1)R' = Q(0)(R')^2 = (q_4(0), q_5(0), q_1(0), q_2(0), q_3(0));$$

$$Q(3) = Q(2)R' = Q(0)(R')^3 = (q_3(0), q_4(0), q_5(0), q_1(0), q_2(0));$$

$$Q(4) = Q(3)R' = Q(0)(R')^4 = (q_2(0), q_3(0), q_4(0), q_5(0), q_1(0));$$

$$Q(5) = Q(4)R' = Q(0)(R')^5 = (q_1(0), q_2(0), q_3(0), q_4(0), q_5(0)) = Q(0).$$

Таким образом, $Q(t) = Q(t_i)$, где t_i остаток от деления t на 5: $t_i < 5$, $t_i \equiv t \pmod{5}$.

Нетрудно обобщить этот результат на цикл с n вершинами. Для такого цикла при функционировании по правилу 2 вся бесконечная последовательность состояний определяется состояниями на первых n тактах: $Q(t) = Q(t_i)$, где $t_i < n$, $t_i \equiv t \pmod{n}$.

Из этих соображений следует, что предельное состояние в цикле, функционирующем по правилу 2, существует в том и только в том случае, когда в начальном состоянии ресурс распределен равномерно по всем вершинам, то есть $Q(0) = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n}\right)$. Тогда $\forall t Q(t) = Q(0)$ и $Q^* = Q(0)$. Это состояние является равновесным. Во всех остальных случаях в сети возникают незатухающие колебания; предельного состояния не существует.

Пример 5.1. Рассмотрим цикл с пятью вершинами и одинаковыми пропускными способностями, равными 5.

$$(5.1) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r_{sum} = 25$. Начальное состояние: $Q(0) = (2, 0, 0, 0, 0)$. Сеть функционирует по правилу 2. Динамика ресурса представлена на рис. 5.1.

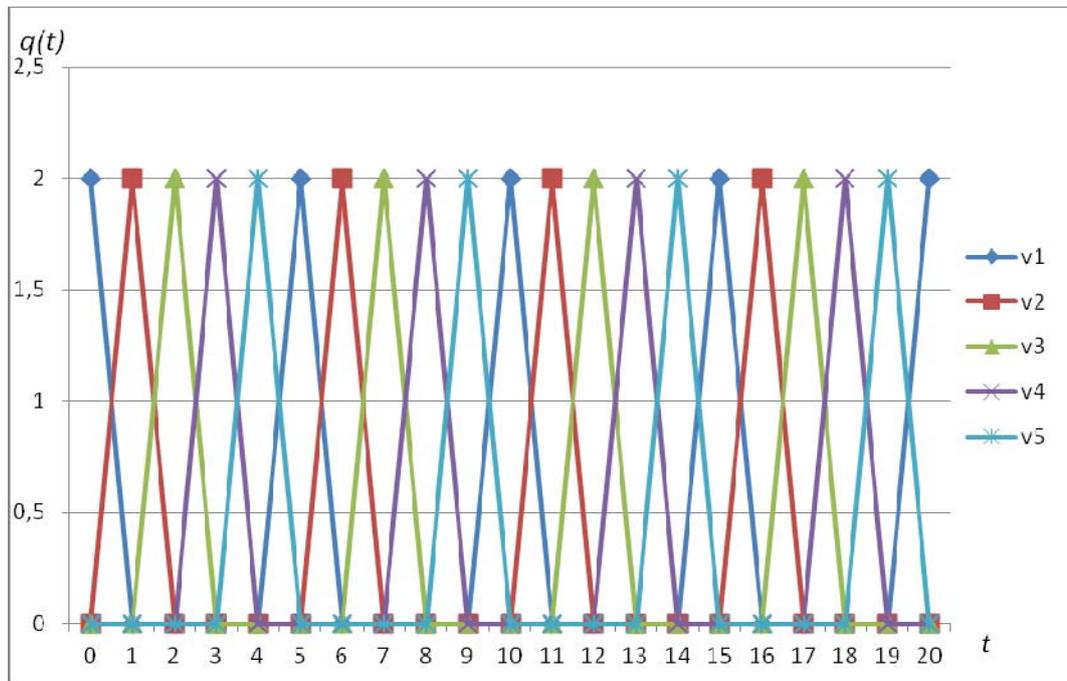


Рис. 5.1. Колебания малого ресурса в нерегулярной эргодической сети
 Протокол работы такой сети представлен в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	2,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	2,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	2,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	2,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	2,000
5	2,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	2,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	2,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	2,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	2,000
10	2,000	0,000	0,000	0,000	0,000
...					

Ресурс, равный 2, оказывается последовательно в каждой из вершин на каждый пятый такт, остальные четыре такта вершины пусты. Предельного состояния в такой сети не существует.

Начальные состояния с равным малым ресурсом во всех вершинах, вплоть до $Q(0) = (5, 5, 5, 5, 5)$ устойчивы. Перераспределения ресурса между вершинами не происходит. Поскольку сеть однородна, устойчивым будет и состояние $Q(0) = (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5)$ при любых, $W_1, \dots, W_5 > 5$.

Введем понятие порогового значения в элементарном цикле. При малых ресурсах функционирование эргодической сети, как уже было

показано, зависит от начального состояния. При этом если сеть не сразу начинает функционировать по правилу 2 целиком, а некоторые вершины переходят на это правило за конечное число тактов, рассуждения остаются прежними. Рассмотрим функционирование сети при одном и том же суммарном ресурсе и разных начальных состояниях. В сети (5.1) при начальном состоянии $Q(0) = (1,6, 1,6, 1,6, 1,6, 1,6)$, все вершины функционируют по правилу 2, и это состояние является равновесным. Если весь суммарный ресурс, равный 8, сконцентрировать в одной вершине, функционирование сети изменится.

Пример 5.2. Однородный цикл задан матрицей (5.1). Начальное состояние $Q(0) = (8, 0, 0, 0, 0)$.

Такое начальное состояние порождает два потока: первый состоит из 5 единиц ресурса, второй – из трех (рис. 5.2, табл. 5.2). Длина периода обоих потоков совпадает с длиной цикла и равна 5.

Каждая вершина функционирует два такта по правилу 2, а затем три такта не имеет ресурса. При этом в один из тактов функционирования ресурс (равный 5) находится на верхней границе применимости правила 2.

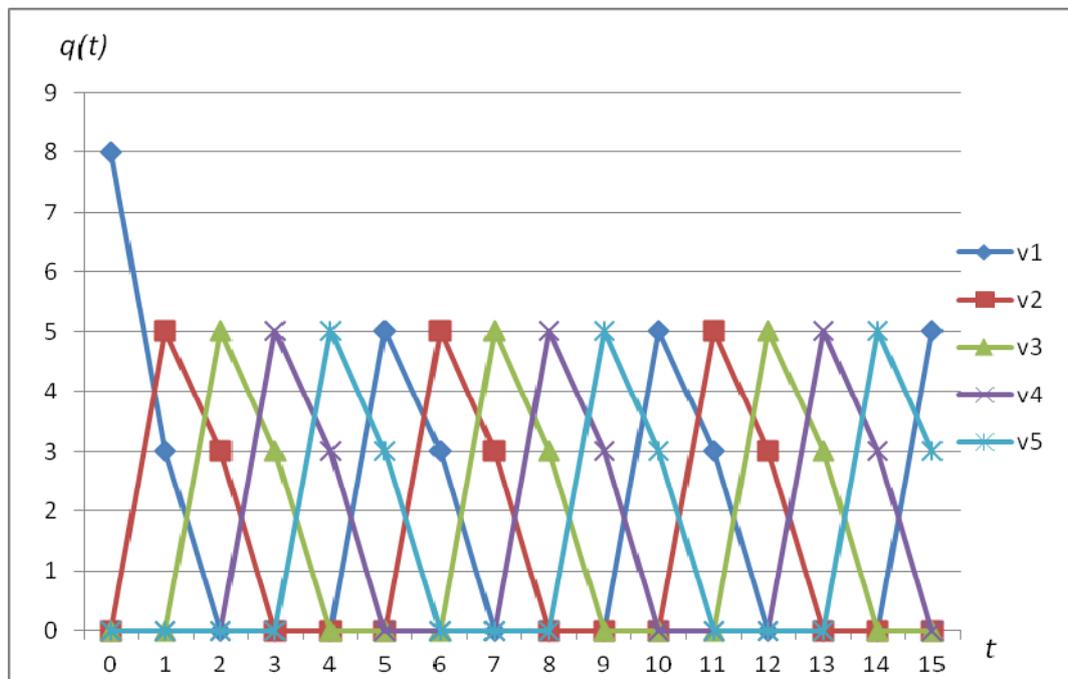


Рис. 5.2. Колебания ресурса в нерегулярной эргодической сети (два потока)

Таблица 5.2. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	8,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	3,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	3,000	5,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	3,000	5,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	3,000	5,000
5	5,000	0,000	0,000	0,000	3,000
6	3,000	5,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	3,000	5,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	3,000	5,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	3,000	5,000
10	5,000	0,000	0,000	0,000	3,000
...					

Таким образом, при малом ресурсе, в отличие от регулярных сетей, в сетях, представленных элементарным циклом, и состояния сети и потоки зависят от начального состояния, и в равновесное состояние нельзя попасть ни из какого неравновесного состояния. То есть, при малом ресурсе равновесное состояние либо является начальным, и сеть устойчива сразу, либо оно никогда не может быть достигнуто.

При больших ресурсах из любого начального состояния в некоторых вершинах происходит насыщение. Эти вершины, как и ранее, будем называть потенциальными аттракторами.

Предельный поток при больших ресурсах всегда существует и не зависит от начального состояния (в отличие от малых ресурсов), предельное состояние также существует, но количество ресурса в аттракторах зависит от начального состояния. В этом элементарные циклы полностью аналогичны регулярным сетям.

Пример 5.3. Рассмотрим сеть с матрицей (5.1). Она однородна и квазисимметрична, то есть является эйлеровой нерегулярной сетью. Поэтому, каждая ее вершина – потенциальный аттрактор. Нетрудно убедиться, что насыщение в этой сети наступает, когда все вершины имеют по $r_i^{out} = 5$ единиц ресурса, и, таким образом, $T = r_{sum} = 25$.

При начальном состоянии $Q(0) = (30, 0, 0, 0, 0)$, функционирование сети представлено на рис. 5.3.

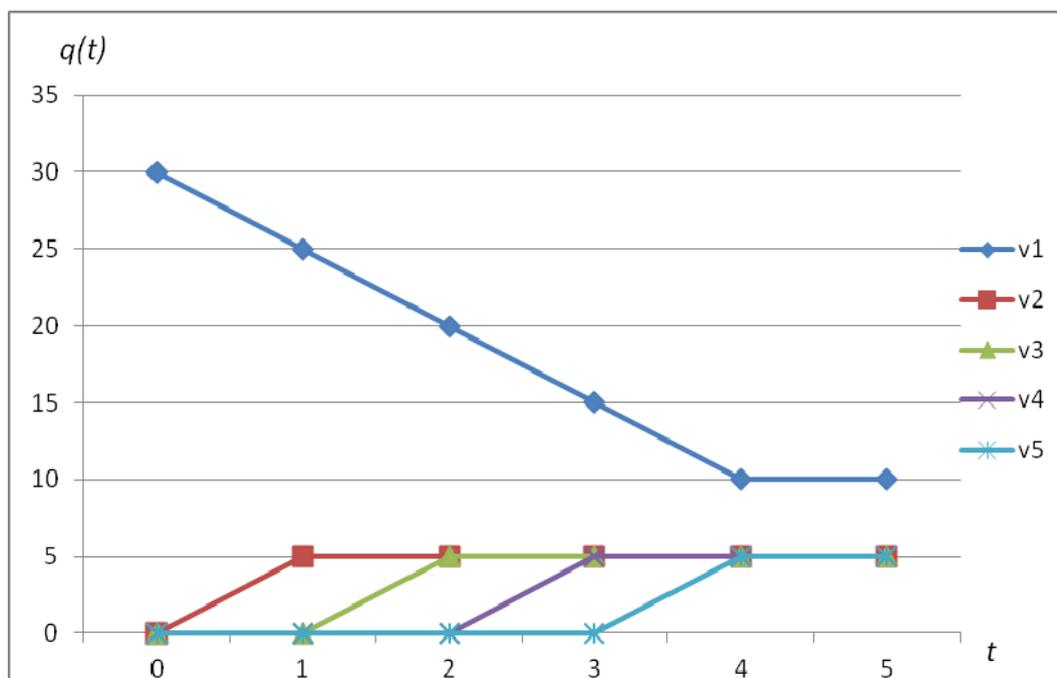


Рис. 5.3. Функционирование сети при $W > T$

Таблица 5.3. Протокол работы сети при $Q(0) = (30, 0, 0, 0, 0)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	30,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	25,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	20,000	5,000	5,000	0,000	0,000
3	15,000	5,000	5,000	5,000	0,000
4	10,000	5,000	5,000	5,000	5,000
5	10,000	5,000	5,000	5,000	5,000
...					

Из таблицы 5.3 видно, что за первые пять тактов все вершины получили ресурс, равный своей пропускной способности, и на этом изменения компонент вектора состояния завершились. Сеть не прекращает функционировать, но ее состояние остается неизменным.

Закон изменения вектора состояний в неоднородных циклах при функционировании всей сети по правилу 2, совпадает с описанным функционированием однородных циклов, поскольку стохастическая матрица у однородного и неоднородного цикла одна и та же. Однако если малый ресурс сконцентрирован в одной вершине, и хотя бы на нескольких первых тактах некоторые вершины функционируют по правилу 1, начинают проявляться отличия неоднородных циклов от однородных.

Пример 5.4. Рассмотрим сеть, представляющую собой неоднородный цикл, с матрицей пропускных способностей:

$$(5.2) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r_{sum} = 21$. Начальное состояние: $Q(0) = (7, 0, 0, 0, 0)$.

Поскольку суммарный ресурс превосходит пропускные способности ребер, минимальная из которых $r_{33}=3$, он делится на три неравные части, и дальше в сети наблюдается три цикла длины 5: с ресурсом 3, 3 и 1 (рис. 5.4 и таблица 5.4).

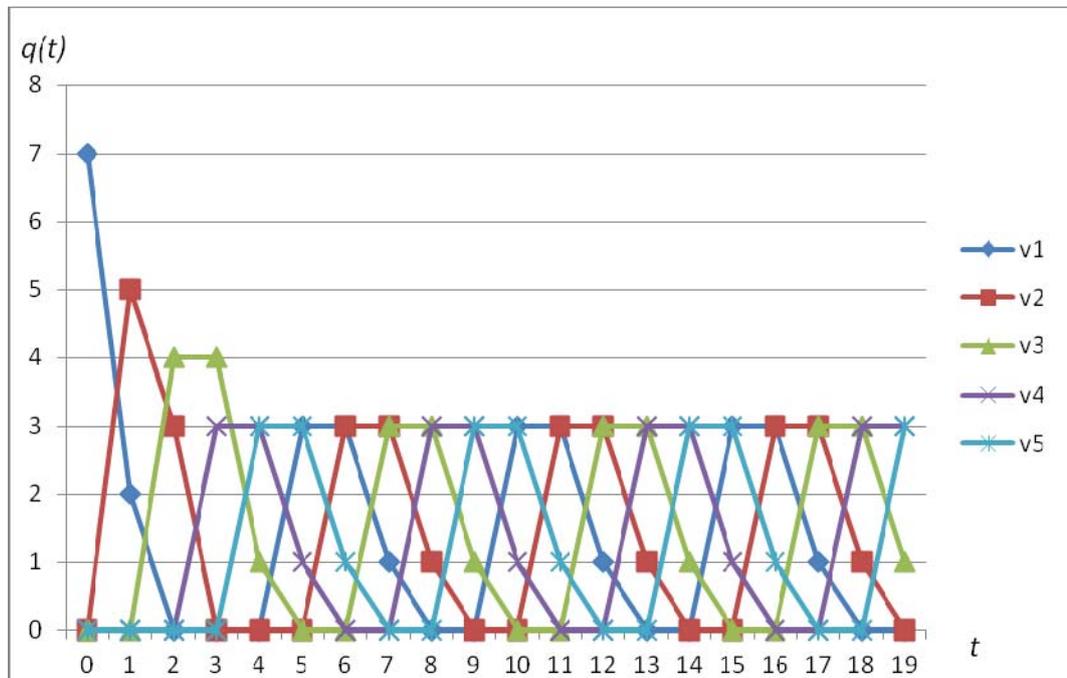


Рис. 5.4. Функционирование неоднородного элементарного цикла

Таблица 5.4. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	7,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	2,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	3,000	4,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	4,000	3,000	0,000
4	0,000	0,000	1,000	3,000	3,000
5	3,000	0,000	0,000	1,000	3,000
6	3,000	3,000	0,000	0,000	1,000
7	1,000	3,000	3,000	0,000	0,000
8	0,000	1,000	3,000	3,000	0,000

9	0,000	0,000	1,000	3,000	3,000
10	3,000	0,000	0,000	1,000	3,000
...					

Таким образом, если элементарный цикл неоднороден, и ресурс в начальном состоянии аккумулирован в одной из вершин, он перемещается между вершинами порциями, – существует несколько последовательных циклов движения ресурса. В каждом из них (за исключением, возможно, одного) ресурс равен минимальной пропускной способности цикла. В одной (заключительной) порции перемещаются «остатки»: ресурс, равный

$$W - \left\lfloor \frac{W}{\min_{i,j} r_{ij}} \right\rfloor \min_{i,j} r_{ij}, \text{ где } \lfloor \cdot \rfloor - \text{целая часть числа.}$$

Отсюда следует, что для любого неоднородного цикла существует значение ресурса, при котором поток стабилизируется за конечное число тактов и сеть приходит в равновесное состояние из любого начального. Поток в каждом ребре будет равен минимальному разрезу, который в данном случае равен минимальной пропускной способности ребер цикла. Суммарный равновесный поток равен пороговому значению ресурса T ; они вычисляются по формуле:

$$\tilde{F}^{in} = \tilde{F}^{out} = (\min r_{ij}, \dots, \min r_{ij}); T = n \cdot \min r_{ij},$$

где n – число вершин, $\min r_{ij}$ – минимальная пропускная способность цикла.

При $W > T$ предельный поток существует, причем $\tilde{F}^{in} = \tilde{F}^{out}$; $f_{sum} = T$ для любого значения суммарного ресурса, а излишки сверх T скапливаются лишь в вершинах v_k , для которых $k = \arg \min_i r_{ij}$.

Так, для сети, заданной матрицей (5.2), $T = 15$.

Пример 5.5. Сеть задана матрицей (5.2), начальное состояние $Q(0) = (15, 0, 0, 0, 0)$.

При таких условиях за первые шесть тактов происходит выравнивание ресурса и стабилизация состояний и потока (рис. 5.5 и табл. 5.5).

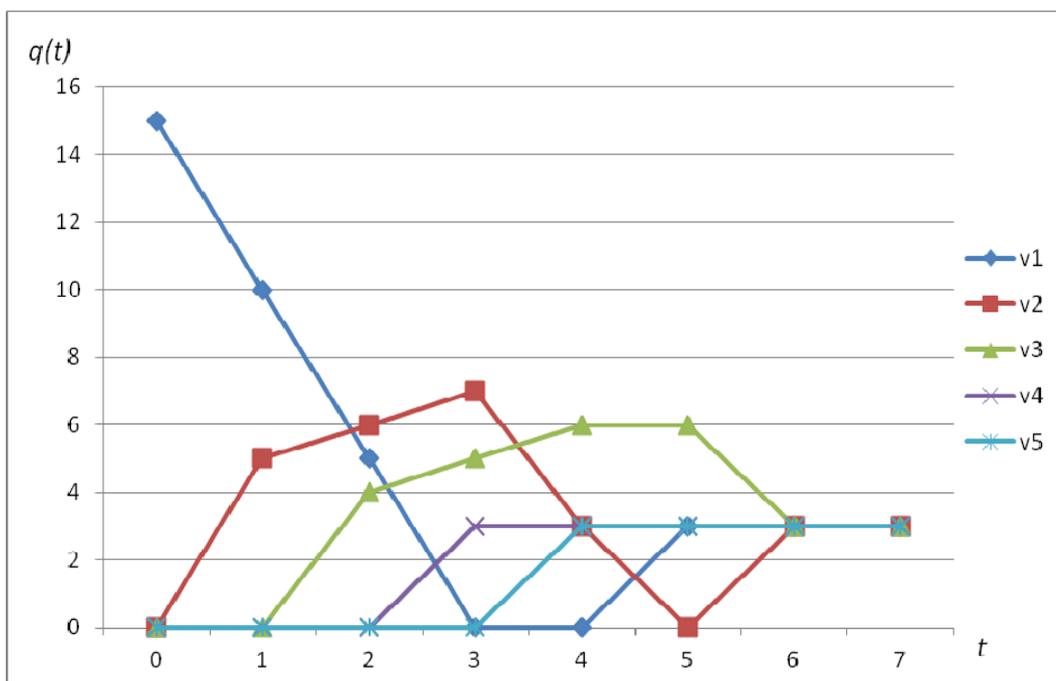


Рис. 5.5. Ресурс $W = T = 15$ выравнивается. Вектор предельного состояния $Q^* = (3, 3, 3, 3, 3)$

Таблица 5.5. Протокол работы сети при $Q(0) = (15, 0, 0, 0, 0)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	15,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	10,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	5,000	6,000	4,000	0,000	0,000
3	0,000	7,000	5,000	3,000	0,000
4	0,000	3,000	6,000	3,000	3,000
5	3,000	0,000	6,000	3,000	3,000
6	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
7	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
...					

В неоднородном цикле при $W > T$, как уже было сказано, ресурс скапливается в вершинах с минимальной выходной пропускной способностью v_k . Такие вершины будут потенциальными аттракторами цикла. Если аттрактор один, предельное состояние единственно. Ресурс $W - T$ в предельном состоянии окажется в аттракторе (рис. 5.6). Отсюда следует, что в сети с матрицей (5.2) потенциальным аттрактором является вершина v_3 .

Пример 5.6. Сеть задана матрицей (5.2), начальное состояние $Q(0)=(20, 0, 0, 0, 0)$.

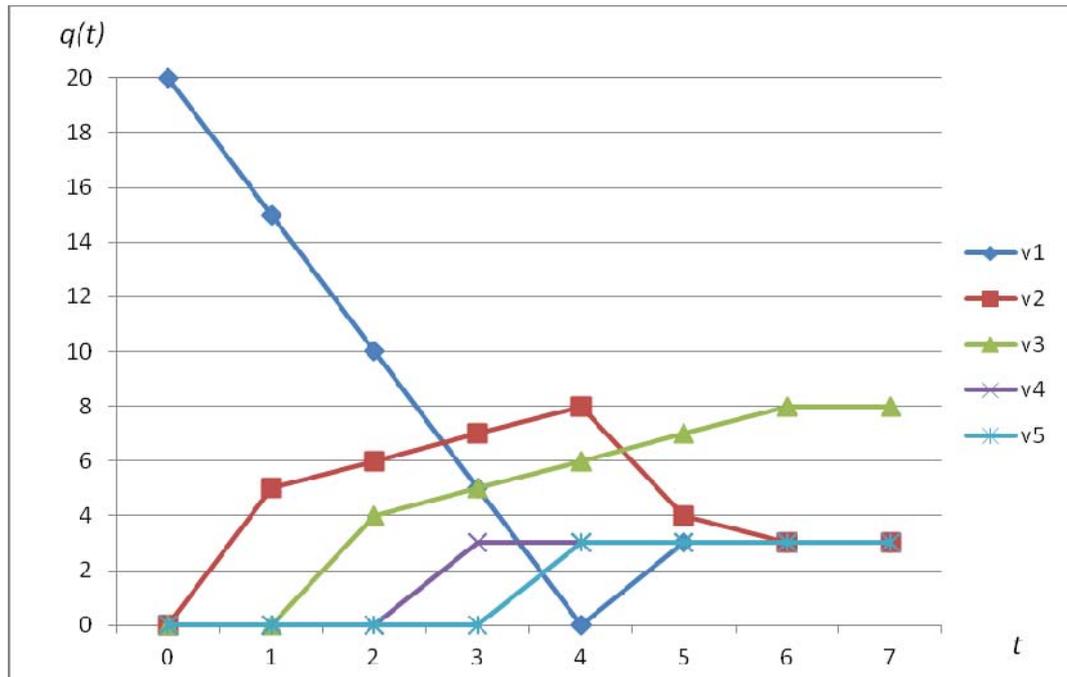


Рис. 5.6. Ресурс $W = 20$. Вектор предельного состояния $Q^* = (3, 3, 8, 3, 3)$

Таблица 5.6. Протокол работы сети при $Q(0) = (20, 0, 0, 0, 0)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	20,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	15,000	5,000	0,000	0,000	0,000
2	10,000	6,000	4,000	0,000	0,000
3	5,000	7,000	5,000	3,000	0,000
4	0,000	8,000	6,000	3,000	3,000
5	3,000	4,000	7,000	3,000	3,000
6	3,000	3,000	8,000	3,000	3,000
7	3,000	3,000	8,000	3,000	3,000
...					

Излишек ресурса $W - T$ перешел в третью вершину. Предельное состояние описывается вектором $Q^* = (3, 3, 8, 3, 3)$.

Интересно, что в последних двух примерах вершина v_1 , обладая всем суммарным ресурсом сети в начальном состоянии, сначала отдает его весь, и только затем получает часть обратно.

Если вершин с минимальной выходной пропускной способностью несколько, предельное состояние зависит от начального состояния и от расположения этих вершин в цикле. Если они идут друг за другом, активным аттрактором будет только первая из них, остальные будут пассивными

аттракторами – они смогут удержать излишек ресурса, находящийся в них в начальном состоянии, но новые излишки будут задерживаться в первой вершине, образующей бутылочное горлышко. Если между такими вершинами есть другие вершины, каждая из них будет активным потенциальным аттрактором, и количество ресурса в них в предельном состоянии будет зависеть от начального состояния.

Пример 5.7. Рассмотрим неоднородный цикл из семи вершин с двумя потенциальными аттракторами v_2 и v_5 – они имеют минимальные выходные пропускные способности.

$$(5.3) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . r_{sum} = 31. T = 2 \cdot 7 = 14.$$

$W = 17 > T$. Начальное состояние: $Q(0) = (17, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

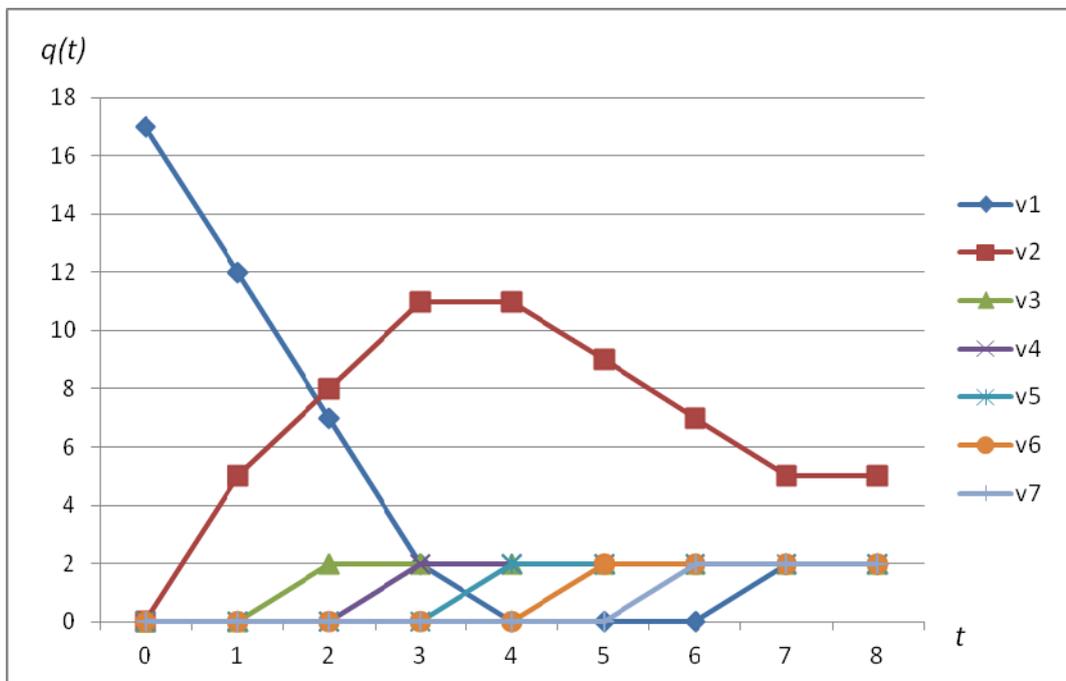


Рис. 5.7. Цикл с двумя аттракторами. Вектор предельного состояния

$$Q^* = (2, 5, 2, 2, 2, 2, 2)$$

Из рисунка видно, что в зону Z^{+*} перешел тот аттрактор, который первым успел задержать ресурс у себя, т.е. вершина v_2 .

При начальном состоянии $Q(0) = (0, 0, 0, 17, 0, 0, 0)$ предельным состоянием будет $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$, то есть, весь излишек останется во втором потенциальном аттракторе v_5 .

Если ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в нескольких вершинах, его излишек $W - T$ распределяется между аттракторами в пропорции, которая зависит от пропускных способностей всех ребер.

Так, например, для матрицы (5.3) при начальном состоянии $Q(0) = (8, 0, 0, 9, 0, 0, 0)$ предельное состояние будет $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$, то есть все излишки вновь окажутся в аттракторе v_5 . Чтобы вершина v_2 тоже получила излишек, ресурс в вершине v_1 должен быть больше 8. Так, при $Q(0) = (9, 0, 0, 8, 0, 0, 0)$ предельное состояние $Q^* = (2, 3, 2, 2, 4, 2, 2)$. Однако при перемещении ресурса, равного 8, в начальном состоянии из вершины v_4 в v_3 , то есть, при $Q(0) = (9, 0, 8, 0, 0, 0, 0)$, предельным состоянием вновь будет вектор $Q^* = (2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$ – все излишки забирает аттрактор v_5 . Это происходит оттого, что ресурс должен проделать более длинный путь по циклу до возвращения в его начало: вершину v_1 , служащую источником для аттрактора v_2 . При $Q(0) = (9, 0, 8, 0, 0, 0, 0)$ вершина v_1 пуста три такта (со второго по четвертый), и этого достаточно, чтобы ресурс из аттрактора v_2 переместился в аттрактор v_5 . (рис. 5.8, табл. 5.8).

Из рисунка видно, что к тому моменту (такт 5), как ресурс вершины v_1 , становится вновь ненулевым, и она могла бы поддерживать баланс в вершине v_2 , вершина v_2 уже имеет ресурс, равный единице, то есть не имеет излишков.

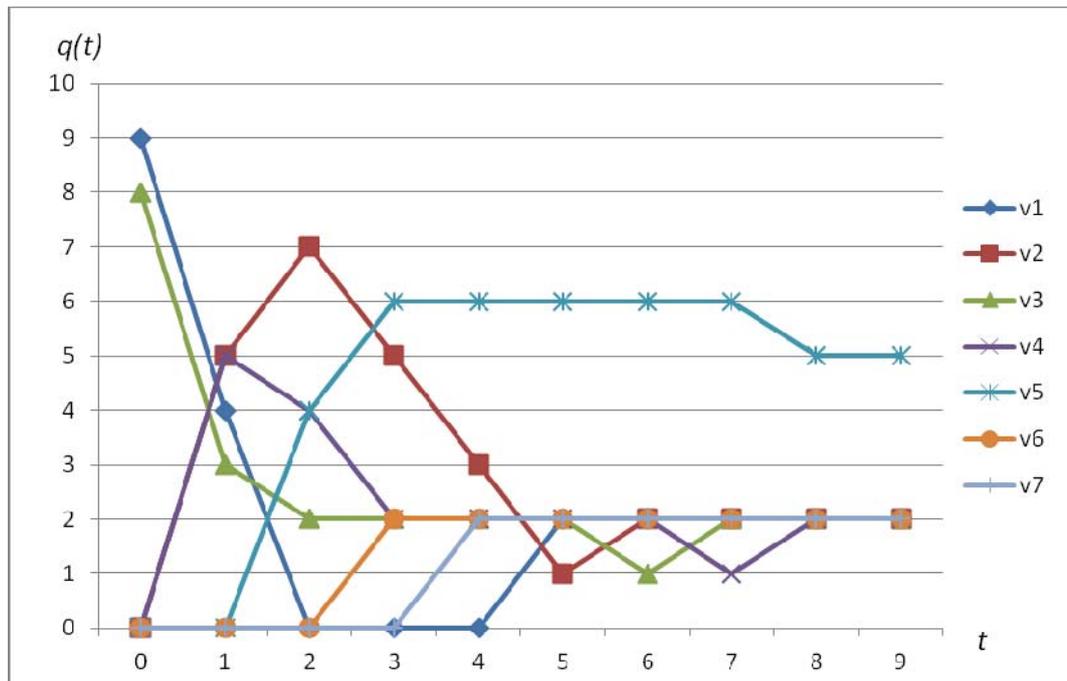


Рис. 5.8. Цикл с двумя аттракторами. Вектор предельного состояния $Q^*=(2, 2, 2, 2, 5, 2, 2)$

Таблица 5.8. Протокол работы сети при $Q(0) = (20, 0, 0, 0, 0)$

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	9,000	0,000	8,000	0,000	0,000
1	4,000	5,000	3,000	5,000	0,000
2	0,000	7,000	2,000	4,000	4,000
3	0,000	5,000	2,000	2,000	6,000
4	0,000	3,000	2,000	2,000	6,000
5	2,000	1,000	2,000	2,000	6,000
6	2,000	2,000	1,000	2,000	6,000
7	2,000	2,000	2,000	1,000	6,000
8	2,000	2,000	2,000	2,000	5,000
9	2,000	2,000	2,000	2,000	5,000
...					

Обобщим все результаты, полученные при рассмотрении элементарных циклов, в виде утверждений.

У т в е р ж д е н и е 5.1. Для циклической ресурсной сети с n вершинами, представленной однородным элементарным циклом с пропускной способностью ребер r , пороговое значение ресурса равно суммарной пропускной способности сети: $T = rn$.

1) При $W < T$ равновесие в сети может быть получено только если начальное состояние является вектором равновесного состояния:

$Q^* = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right)$; при любом другом начальном состоянии равновесного состояния и потока не существует.

2) При $W = T$ предельный поток и предельное состояние существуют и единственны. Вектор предельного потока равен вектору предельного состояния: $F^{in*} = F^{out*} = Q^* = (r, \dots, r)$.

3) При $W > T$ предельное состояние и поток существуют, причем предельный поток определяется единственным образом: $F^{in*} = F^{out*} = (r, \dots, r)$. Предельное состояние зависит от начального.

У т в е р ж д е н и е 5.2. Для циклической ресурсной сети с n вершинами, представленной неоднородным элементарным циклом, пороговое значение ресурса T вычисляется по формуле: $T = n \cdot r_{min}$, где $r_{min} = \min r_{ij}$.

1) При $W < T$ равновесие в сети достигается на том же векторе, что и в однородном цикле: $Q^* = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right)$; при любом другом начальном состоянии предельного состояния и потока не существует.

2) При $W = T$ предельный поток и предельное состояние существуют и единственны. Вектор предельного потока равен вектору предельного состояния: $F^{in*} = F^{out*} = Q^* = (r_{min}, \dots, r_{min})$.

3) При $W > T$ предельное состояние и поток существуют, причем предельный поток определяется единственным образом: $F^{in*} = F^{out*} = (r_{min}, \dots, r_{min})$. Предельное состояние единственно в том и только в том случае, когда сеть имеет единственный потенциальный аттрактор. В противном случае распределение ресурса сверх порогового значения $W - T$ зависит от начального состояния.

4) Вершина v_k является потенциальным аттрактором элементарного цикла в том и только в том случае если для нее выполняется $k = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} r_{ij}$. Если два и более потенциальных аттрактора расположены в цикле непосредственно друг за другом, то активным аттрактором

является только тот, для которого $r_i^{in} > r_i^{out}$; остальные аттракторы пассивны.

Доказательства обоих утверждений следуют непосредственно из свойств элементарных циклов.

5.2. Функционирование произвольных циклических сетей при малом ресурсе

Перейдем к рассмотрению произвольных циклических сетей. Любая циклическая сеть состоит из простых циклов, то есть, циклов, пересекающихся по вершинам, и/или из циклов, пересекающихся по ребрам.

При функционировании по правилу 2 вектор начального состояния $Q(0)$ умножается на последовательные степени стохастической матрицы. Нулевые элементы в этих степенях периодически повторяются. Циклические классы – это множества вершин v_i , которые имеют ресурс в одних и тех же тактах при суммарном ресурсе $W = 1$, сосредоточенном в начальном состоянии в одной из вершин. Количество степеней матрицы R' с различным расположением нулей равно количеству циклических классов d . Последовательность R'^k не имеет предела. Однако ее можно рассматривать как d подпоследовательностей с нулями в определенных фиксированных позициях. Каждая из этих подпоследовательностей имеет предел [28], а вся последовательность R'^k суммируема по Чезаро к предельной матрице A . Обозначим каждый из таких пределов через $R_i'^{\infty}$, $i = 0, \dots, d - 1$.

Циклическую сеть, состоящую из d циклических классов, будем называть d -циклической сетью.

Стохастическая матрица R' такой сети имеет ровно d собственных значений, равных по модулю единице: $\lambda_1 = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_d| = 1$, то есть, является импримитивной с индексом импримитивности d [28].

Прежде чем формулировать общие утверждения о предельных матрицах, предельных векторах, и возможности достижения глобальной устойчивости в циклических сетях при малых ресурсах, проследим на

примере процессы, происходящие в сетях: изменение векторов состояния и изменение степеней стохастической матрицы.

5.2.1. Функционирование циклической сети при $W = 1$

Пример 5.8. Пусть сеть представлена двудольным графом (рис. 5.9.).

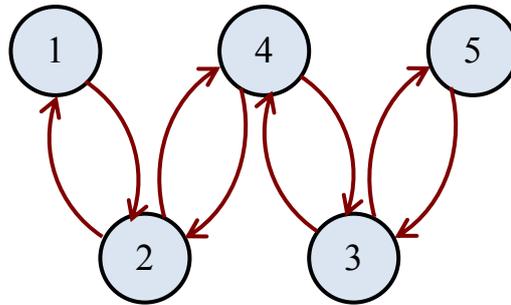


Рис. 5.9. Двудольный граф с пятью вершинами, $d = 2$

Ее матрица пропускных способностей:

$$(5.4) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{sum} = 16.$$

Соответствующая ей стохастическая матрица имеет вид:

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рис. 5.10 показан процесс перераспределения ресурса, соответствующий начальному состоянию $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$.

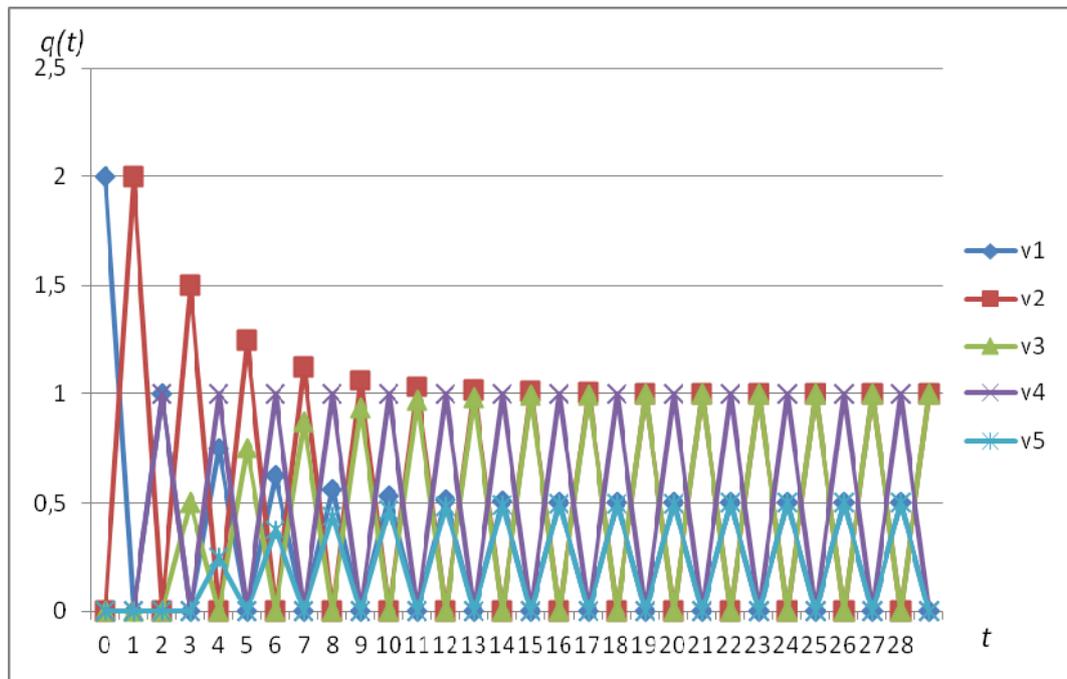


Рис. 5.10. Колебания при $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

Протокол функционирования сети, соответствующий рис. 2, представлен в таблице 5.9.

Таблица 5.9. Протокол функционирования 2-циклической сети с матрицей (1) и $Q_1(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0,5	0	0	0,5	0
3	0	0,75	0,25	0	0
4	0,375	0	0	0,5	0,125
5	0	0,625	0,375	0	0
6	0,313	0	0	0,5	0,188
7	0	0,563	0,438	0	0
8	0,281	0	0	0,5	0,219
9	0	0,531	0,469	0	0
10	0,266	0	0	0,5	0,234
11	0	0,516	0,484	0	0
12	0,258	0	0	0,5	0,242
13	0	0,508	0,492	0	0
14	0,254	0	0	0,5	0,246
15	0	0,504	0,496	0	0
16	0,252	0	0	0,5	0,248
17	0	0,502	0,498	0	0
18	0,251	0	0	0,5	0,249
19	0	0,501	0,499	0	0
20	0,25	0	0	0,5	0,25
21	0	0,5	0,5	0	0
22	0,25	0	0	0,5	0,25
23	0	0,5	0,5	0	0
...

Из рис. 5.10 и таблицы 5.9 видно, что на четных тактах ресурс содержится в вершинах v_1, v_4 и v_5 , на нечетных – в v_2 и v_3 . В этой сети $d = 2$, циклическими классами являются множества $\{v_1, v_4, v_5\}$ и $\{v_2, v_3\}$.

Протокол функционирования показывает, что в пределе получается два вектора, последовательно сменяющие друг друга:

$$Q_1^{1*} = (0,25, 0, 0, 0,5, 0,25) \text{ и } Q_2^{1*} = (0, 0,5, 0,5, 0, 0).$$

Помещая ресурс $W = 1$ в начальном состоянии поочередно в каждую из вершин, получим те же два предельных вектора Q_1^{1*} и Q_2^{1*} , одинаковые для всех начальных состояний: $Q(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 1, 0, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 0, 1, 0)$, $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Поскольку $d = 2$, последовательность степеней стохастической матрицы R' состоит из двух сходящихся подпоследовательностей. Их пределы равны:

$$R_1^{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2^{\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Матрицы R_1^{∞} и R_2^{∞} состоят из чередующихся векторов Q_1^{1*} и Q_2^{1*} , причем R_2^{∞} представляет собой инверсию R_1^{∞} : в ней каждый вектор Q_1^{1*} заменен вектором Q_2^{1*} , и наоборот. Строки 1, 4, 5, соответствующие вершинам одного циклического класса, равны; то же самое относится и к строкам 2, 3, соответствующим вершинам другого циклического класса.

Оба вектора Q_1^{1*} и Q_2^{1*} являются собственными векторами матрицы $R_2^{1\infty}$, а матрица $R_1^{1\infty}$ переводит вектор Q_1^{1*} в Q_2^{1*} , Q_2^{1*} – в Q_1^{1*} . То же самое происходит и при умножении этих векторов на матрицу R' :

$$Q_1^{1*} R' = Q_2^{1*}, Q_2^{1*} R' = Q_1^{1*}.$$

Умножение на стохастическую матрицу R' переводит матрицу $R_1^{1\infty}$ в $R_2^{1\infty}$ и наоборот.

Заметим, что сумма двух предельных матриц дает матрицу с одинаковыми строками:

$$R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Вектор, образующий строки этой матрицы, является левым собственным вектором обеих матриц $R_1^{1\infty}$ и $R_2^{1\infty}$, а также стохастической матрицы R' ; более того, если в матрице $R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty}$ нормировать строки, окажется, что она равна предельной матрице A , к которой суммируется по Чезаро последовательность R'^k :

$$(5.5) \quad A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R'^j.$$

$$A = \frac{R_1^{1\infty} + R_2^{1\infty}}{2} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

Матрица R' неразложима по построению. Неразложимая неотрицательная матрица имеет единственный неотрицательный собственный вектор (с точностью до скалярного множителя) [28]. Собственный вектор стохастической матрицы сети определяется как сумма

векторов Q_1^{1*} и Q_2^{1*} . Для доказательства этого факта достаточно сложить равенства $Q_1^{1*} R' = Q_2^{1*}$ и $Q_2^{1*} R' = Q_1^{1*}$.

Вектор абсолютных предельных вероятностей находится по формуле:

$$Q^{1*} = \frac{1}{2}(Q_1^{1*} + Q_2^{1*}).$$

5.2.2. Предельные векторы и циклы d -циклической сети

Введем некоторые дополнительные обозначения и приведем результаты, полученные для d -циклических эргодических цепей Маркова.

В [75] доказано, что предельная матрица A , к которой суммируется по Чезаро последовательность R^k , (формула (5.5)) имеет вид:

$$A = \mathbf{1} \cdot \alpha,$$

где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц, а α является единственным неотрицательным левым собственным вектором матрицы R' , соответствующим собственному числу $\lambda = 1$:

$$(5.6) \quad \alpha R' = \alpha.$$

Также выполняется

$$AR' = R'A = A.$$

Пусть R' – стохастическая матрица эргодической d -циклической ресурсной сети. Рассмотрим последовательность ее степеней: $R', \dots, R'^d, R'^{d+1}, \dots$. Она состоит из d сходящихся подпоследовательностей:

$$1) R', R'^d \cdot R', R'^{2d} \cdot R', R'^{3d} \cdot R', \dots$$

$$2) R'^2, R'^d \cdot R'^2, R'^{2d} \cdot R'^2, R'^{3d} \cdot R'^2, \dots$$

...

$$d) R'^d, R'^d \cdot R'^d, R'^{2d} \cdot R'^d, R'^{3d} \cdot R'^d, \dots$$

Таким образом, видно, что все пределы $R_1'^{\infty}, \dots, R_d'^{\infty}$ выражаются через одну предельную матрицу $R_d'^{\infty}$:

$$R_1'^{\infty} = R_d'^{\infty} R';$$

$$R_2'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^2;$$

...

$$R_{d-1}'^{\infty} = R_d'^{\infty} R'^{d-1}.$$

Сумма матриц $R_1'^{\infty}, \dots, R_d'^{\infty}$ строго положительна. В [28] доказано, что предельная матрица A (5.5) определяется по формуле:

$$(5.7) \quad A = \frac{1}{d}(E + R' + \dots + R'^{d-1})R_d'^{\infty} = \frac{1}{d}R_d'^{\infty}(E + R' + \dots + R'^{d-1})$$

Для любого начального распределения единичного ресурса выполнится:

$$(5.8) \quad \alpha = Q^1(0)A.$$

Формула (5.8) означает, что каждая строка матрицы A соответствует предельным вероятностям цепи Маркова в смысле среднего арифметического. Далее при описании ресурсных сетей вместо символа α , обозначающего предельный вероятностный вектор, будем использовать обозначение Q^{1*} – вектор предельного состояния при единичном ресурсе: $Q^{1*} = Q^1(0)A$; матрица A состоит из n одинаковых вектор-строк, равных Q^{1*} .

Рассмотрим процесс функционирования сети по правилу 2. Последовательность векторов состояний делится на d сходящихся подпоследовательностей, так же, как и последовательность степеней стохастической матрицы.

$$Q(kd+1) = Q(0)R'^{kd} R',$$

$$Q(kd+2) = Q(0)R'^{kd} R'^2,$$

...

$$Q(kd) = Q(0)R'^{kd} R'^d = Q(0)R'^{(k+1)d}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Переходя к пределу, получим:

$$(5.9) \quad Q_1^* = Q(0)R_d'^{\infty} R', \quad Q_2^* = Q(0)R_d'^{\infty} R'^2, \quad \dots \quad Q_d^* = Q(0)R_d'^{\infty}.$$

Непосредственно из выражений (5.9) следует, что:

$$Q_{i+1}^* = Q_i^* R', \quad i = 1, \dots, d-1, \quad Q_1^* = Q_d^* R'.$$

Векторы Q_1^*, \dots, Q_d^* будем называть *предельными векторами*. Последовательность, в которой они сменяют друг друга, будем называть *предельным циклом* эргодической сети.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 5.3. В эргодической d -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, существует предельный цикл длины d , состоящий из предельных векторов Q_1^, \dots, Q_d^* , определяемых по формуле (5.9).*

У т в е р ж д е н и е 5.4. Для эргодической d -циклической ресурсной сети единственным положительным собственным вектором матрицы R' является вектор Q^{1} , определяемый по формуле:*

$$(5.10) \quad Q^{1*} = \frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{d \cdot W},$$

где Q_1^*, \dots, Q_d^* – предельные векторы сети, функционирующей по правилу 2, с суммарным ресурсом W и начальным состоянием $Q(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Суммируя выражения (5.9), имеем:

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = Q(0)R_d'^{\infty} (E + R' + \dots + R'^{d-1}).$$

Преобразуя правую часть по формуле (5.7), получим:

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = dQ(0)A. \text{ (Это известные результаты теории матриц [28]).}$$

Но любой вектор $Q(0)$ при условии, что сеть с нулевого такта функционирует по правилу 2, можно представить в виде: $Q(0) = WQ^1(0)$.

Отсюда

$$Q_1^* + \dots + Q_d^* = dWQ^1(0)A \text{ или}$$

$$\frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{dW} = Q^1(0)A$$

Из формулы (5.8) имеем: $Q^{1*} = \frac{Q_1^* + \dots + Q_d^*}{dW}$. То есть, матрица A состоит из n вектор-строк, определяемых формулой (5.10). А из (5.6) следует, что $Q^{1*}R' = Q^{1*}$. \square

При умножении на матрицу R' , каждый вектор Q_i^* переходит в вектор Q_{i+1}^* (сложение индексов происходит по модулю d). Но существует матрица, которая оставляет все эти векторы неподвижными.

У т в е р ж д е н и е 5.5. Предельные векторы эргодической d -циклической сети Q_1^, \dots, Q_d^* являются собственными векторами матрицы $R_d'^{\infty}$, соответствующими собственному числу $\lambda = 1$ кратности d .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем равенства (5.9) в виде:

$$(5.11) \quad Q_i^* = Q(0)R_d'^{\infty}R'^i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Умножим обе части (5.11) на матрицу $R_d'^{\infty}$ справа.

$Q_i^*R_d'^{\infty} = Q(0)R_d'^{\infty}R'^iR_d'^{\infty}$, но по формуле (5.7) это можно переписать в виде:

$$Q_i^*R_d'^{\infty} = Q(0)(R_d'^{\infty}R_d'^{\infty})R'^i = Q(0)R_d'^{\infty}R'^i$$

По формуле (5.11) правая часть равенства равна Q_i^* . Тогда

$$Q_i^*R_d'^{\infty} = Q_i^*. \quad \square$$

З а м е ч а н и е. В предельном случае, когда НОД всех циклов сети равен единице, и соответственно, сеть представляет собой один циклический класс (является регулярной), доказанные утверждения остаются верными. В сети, функционирующей по правилу 2, существует единственный вектор предельного состояния Q^* . Он является собственным вектором стохастической матрицы R' (утверждение 5.3), для него верно равенство

$$(5.10): \quad Q^{1*} = \frac{Q^*}{W}$$

единственной предельной матрицы R'^{∞} , соответствующим простому

собственному числу $\lambda = 1$ (утверждение 5.5). Справедливость всех этих утверждений следует непосредственно из свойств регулярных цепей Маркова. Для ресурсных сетей они сформулированы в главе 2.

5.2.3. Достижение глобального равновесия при малых ресурсах

Рассмотрим задачу нахождения начального состояния, при котором в сети достигается *глобальное равновесие*, то есть все векторы Q_1^*, \dots, Q_d^* совпадают.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах предельных векторов и предельных степеней матриц.

Лемма 5.1. В эргодической d -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, предельные векторы Q_1^*, \dots, Q_d^* при постоянном суммарном ресурсе в циклических классах не зависят от распределения ресурса по вершинам внутри классов в начальном состоянии.

Доказательство. Матрица R' импримитивна с индексом импримитивности d . В [28] доказано, что ее степень R'^d разлагается на d примитивных матриц, которые имеют одно и то же максимальное характеристическое число. Это означает, что существует такая нумерация вершин, при которой R'^d блочно-диагональна. Блоки соответствуют циклическим классам.

$$R'^d = \begin{pmatrix} R'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R'_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & R'_{dd} \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица R'_{ii} неразложима и примитивна по определению, кроме того, все эти матрицы являются стохастическими. Каждая из них задает регулярную цепь Маркова. Матрица $R'_d{}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} (R'^d)^k$ также является блочной с блоками $(R'_{ii})^\infty$. Каждая пара блоков R'_{ii} и $(R'_{ii})^\infty$ имеет один и

тот же единственный положительный собственный вектор π_i , соответствующий максимальному собственному числу $\lambda = 1$, $i = 1, \dots, d$.

Поскольку сеть с первого такта функционирует по правилу 2, т.е. вершины отдают весь свой ресурс, на каждом такте ресурс из каждого циклического класса полностью переходит в следующий класс.

Вектор состояния $Q(0)$ можно разложить в сумму векторов $Q_i(0)$, каждый из которых соответствует одному циклическому классу. Тогда поскольку матрицы R_{ii}^d регуляры, при $W_i = 1$ для любого $Q_i(0)$ имеют место равенства $Q_i(0)R_{ii}^{\infty} = Q_{di}^* = \pi_i$.

Для произвольного суммарного ресурса W при условии, что сеть с первого такта функционирует по правилу 2, для любого $Q_i(0)$ выполнится:

$Q_i(0)R_{ii}^{\infty} = Q_{di}^* = W_i\pi_i$, где W_i – суммарный ресурс в i -м циклическом классе.

Прямая сумма векторов Q_{di}^* даст единственный вектор Q_d^* . Остальные векторы предельного цикла получаются из Q_d^* умножением на соответствующие степени матрицы R' и тоже определяются единственным образом. \square

Лемма 5.2. В эргодической d -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, при суммарном ресурсе $W = 1$, сосредоточенном в начальном состоянии в m -м циклическом классе, предельные векторы Q_1^, \dots, Q_d^* являются строками предельных матриц R_j^{∞} , каждая из которых состоит из d различных строк, причем, на строках, соответствующих номерам вершин из i -го циклического класса находится вектор Q_k^* , где $k \in [1, d]$,*

$$(5.12) \quad k \equiv m + j + i - 3 \pmod{d} + 1, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Доказательство. Рассмотрим начальное состояние, в котором ресурс находится в первом циклическом классе ($m = 1$). Не нарушая

общности, предположим, что этому классу принадлежит вершина v_1 . Пусть $Q(0) = (1, 0, \dots, 0)$. Обозначим этот вектор начального состояния через $Q_1(0)$.

Имеем:

$$Q_1^* = Q_1(0)R_1^{\infty} = (R_1^{\infty})_1,$$

$$Q_2^* = Q_1(0)R_2^{\infty} = (R_2^{\infty})_1,$$

...

$$Q_d^* = (R_d^{\infty})_1,$$

где $(R_j^{\infty})_1$ – первая строка матрицы R_j^{∞} .

По лемме 1, вместо вершины v_1 может быть взята любая вершина из первого циклического класса. Таким образом, в матрицах R_j^{∞} в строках, соответствующих номерам вершин из первого циклического класса, стоят векторы Q_j^* .

Для каждого вектора Q_{i+1}^* ($i = 1, \dots, d-1$) справедливо $Q_{i+1}^* = Q_i^* R'$, $Q_1^* = Q_d^* R'$; для предельных матриц выполняется: $R_{j+1}^{\infty} = R_j^{\infty} R'$. Это означает, что каждая матрица R_j^{∞} в строках, соответствующих номерам вершин из i -го циклического класса, содержит векторы с номером $j+i-1$ при $j+i-1 \leq d$, и с номером $j+i-1-d$ при $j+i-1 > d$.

Индекс k вектора Q_k^* , удовлетворяющий этим условиям, находится по формуле: $k \equiv j+i-2 \pmod{d} + 1$.

Обобщая эту формулу на произвольный класс с номером m , получим:

$$k \equiv m+j+i-3 \pmod{d} + 1. \quad \square$$

С помощью полученных результатов докажем лемму о существовании равновесного состояния в циклических сетях.

Лемма 5.3. В эргодической d -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, предельные векторы Q_1^ , ..., Q_d^* совпадают если в каждом из циклических классов в начальном состоянии находится*

одинаковое количество ресурса $\frac{W}{d}$, и для каждой вершины выполнено $q_i(0) \leq r_i^{out}$. Вектор предельного состояния равен WQ^{1*} , где Q^{1*} – любая строка матрицы A , определяемой по формуле (5.7).

Доказательство. Рассмотрим d векторов начального состояния с единичным ресурсом, сосредоточенным в некоторой вершине каждого из циклических классов: $Q_m(0)$, где m – номер циклического класса, $m = 1, \dots, d$.

Обозначим их предельные векторы через $Q_{j_m}^*$, где j – номер предельного вектора при заданном начальном состоянии. Получим следующие равенства:

$Q_{j_m}^* = Q_m(0)R_d'^{\infty}R'^j = Q_1(0)R_d'^{\infty}R'^{j+m} = Q_k^*$, где $Q_k^* = Q_{k_1}^*$ – предельные векторы при ресурсе, находящемся в первом классе, индекс $k \in [1, d]$ вычисляется по формуле (9) при $m = 1$.

Сложим векторы $Q_i(0)$ и найдем первый предельный вектор.

$$(Q_1(0) + \dots + Q_d(0))R_d'^{\infty}R' = Q_{1_1}^* + \dots + Q_{d_1}^* = Q_1^* + \dots + Q_d^*.$$

Для второго предельного вектора имеем:

$$(Q_1(0) + \dots + Q_d(0))R_d'^{\infty}R'^2 = Q_{1_2}^* + \dots + Q_{d_2}^* = Q_2^* + \dots + Q_d^* + Q_1^*.$$

В общем случае m -й предельный вектор будет суммой векторов $Q_1^* + \dots + Q_d^*$ с циклически переставленными слагаемыми.

Таким образом, если в начальном состоянии в каждом циклическом классе находится единичный ресурс, все d предельных векторов совпадают.

Если ресурс в каждом классе пропорционально увеличить в $\frac{W}{d}$ раз, предельные векторы будут равны при условии, что все вершины сети функционируют по правилу 2. \square

Условие на начальное состояние в лемме 5.3 можно ослабить. Если ресурс в начальном состоянии распределен между циклическими классами неравномерно, и при этом некоторые вершины первые несколько тактов

функционируют по правилу 1, то за эти такты может произойти выравнивание ресурса в циклических классах. Таким образом, справедливо более общее утверждение.

Теорема 5.1. В эргодической d -циклической ресурсной сети, функционирующей по правилу 2, начиная с некоторого момента t' , предельные векторы Q_1^* , ..., Q_d^* совпадают тогда и только тогда, когда в каждом из циклических классов при $t = t'$ находится одинаковое количество ресурса $\frac{W}{d}$. Вектор предельного состояния равен WQ^{1*} , где Q^{1*} – любая строка матрицы A , определяемой по формуле (5.7).

Доказательство.

1. Пусть при $t = t'$ вся сеть функционирует по правилу 2 и в каждом циклическом классе находится одинаковое количество ресурса. Приняв $Q(t')$ за новое начальное состояние, получим условие леммы 5.3.

2. Пусть в сети, функционирующей по правилу 2, векторы Q_1^* , ..., Q_d^* совпадают. По определению для предельного цикла выполняются соотношения: $Q_{i+1}^* = Q_i^* R'$, $i = 1, \dots, d-1$, $Q_1^* = Q_d^* R'$. Тогда имеем: $Q_i^* = Q_i^* R'$, $i = 1, \dots, d$. Умножение на матрицу R' переводит весь суммарный ресурс каждого класса в следующий циклический класс. Совпадение векторов происходит только при одинаковых суммарных ресурсах в каждом циклическом классе. \square

Проиллюстрируем теорему 5.1 примером.

Пример 5.9. Пусть в сети с матрицей пропускных способностей (5.4) начальное состояние $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$. Функционирование сети представлено на рис. 5.11, построенном на основании таблицы 5.10.

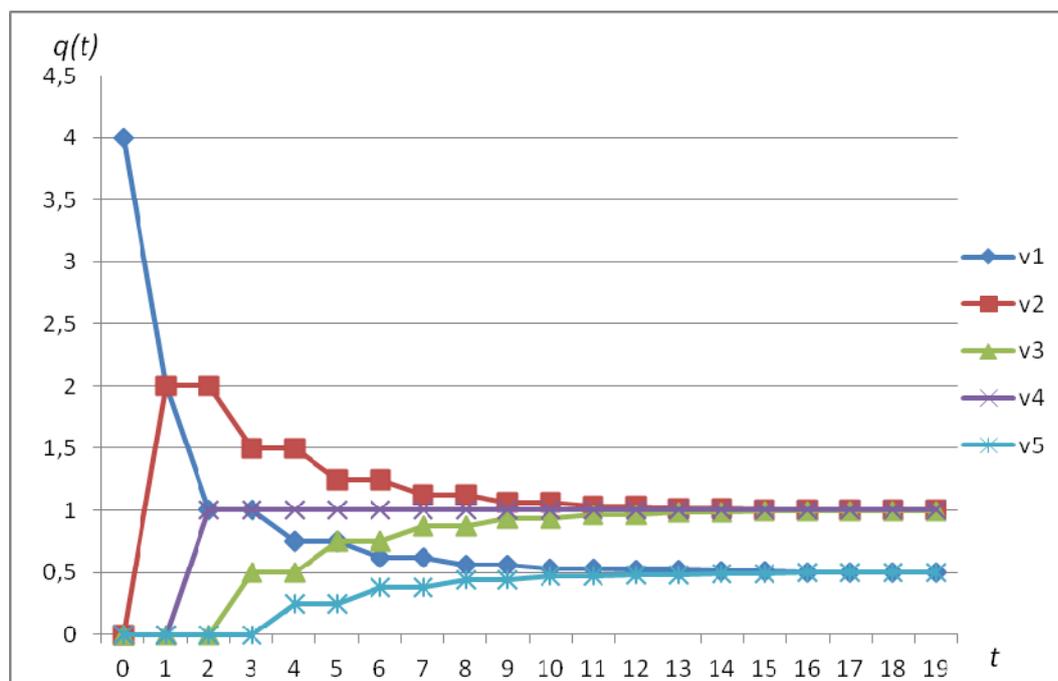


Рис. 5.11. Функционирование сети, заданной графом с матрицей (5.4),
 $Q(0) = (4, 0, 0, 0, 0)$

Таблица 5.10. Протокол работы сети

t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	4,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	2,000	2,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	2,000	0,000	1,000	0,000
3	1,000	1,500	0,500	1,000	0,000
4	0,750	1,500	0,500	1,000	0,250
5	0,750	1,250	0,750	1,000	0,250
...					
20	0,501	1,002	0,998	1,000	0,499
21	0,501	1,001	0,999	1,000	0,499
22	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
23	0,500	1,000	1,000	1,000	0,500
...					

Из протокола видно, что ресурс, в начальном состоянии находившийся в первом циклическом классе, на первом такте разделился поровну между двумя классами. Одновременно с этим все вершины перешли на правило 2, и дальнейшего перераспределения ресурса между циклическими классами не происходит. Сеть стабилизируется; в каждом классе суммарный ресурс равен 2. Два предельных вектора совпадают между собой. В сети имеется равновесное состояние:

$$Q^* = Q_1^* = Q_2^* = (0,5, 1, 1, 1, 0,5).$$

5.3. Пороговое значение T и функционирование циклических сетей при больших ресурсах

5.3.1. Пороговое значение T

В регулярных сетях существование и единственность порогового значения T вытекают из единственности вектора предельного состояния при малых ресурсах. Все компоненты вектора Q^* при увеличении W вплоть до значения T , увеличивались пропорционально, пока одна или несколько из них не принимали значения, равные своим суммарным выходным пропускным способностям. Это значение суммарного ресурса и было пороговым. Вершины с ресурсом, достигшим выходных пропускных способностей при $W = T$, – потенциальные аттракторы сети. При дальнейшем увеличении ресурса пропорциональность компонент нарушается, и все излишки сверх T накапливаются в аттракторах.

В циклической сети существует d предельных векторов, в общем случае, не равных друг другу. Кроме того, каждый из этих векторов зависит от начального состояния. Единственность порогового значения в такой сети уже неочевидна.

Будем говорить, что если в циклической сети d предельных векторов равны при любом начальном состоянии (с фиксированным суммарным ресурсом), в ней существует *предельное состояние* Q^* : $Q_1^* = \dots = Q_d^* = Q^*$.

Теорема 5.2. В эргодической d -циклической ресурсной сети существует единственное пороговое значение T , такое, что:

при $W < T$ все вершины за конечное число тактов переходят на правило 2, и в сети имеется d предельных векторов;

при $W \geq T$ хотя бы один потенциальный аттрактор за конечное число тактов переходит на правило 1. Предельный поток существует и

единствен. Предельное состояние существует; единственно оно в том и только в том случае, когда сеть имеет один аттрактор.

Доказательство. В сети, все вершины которой функционируют по правилу 2, существует предельный цикл из d предельных векторов. Если в начальном состоянии некоторые вершины функционируют по правилу 1, но все они за конечное число тактов N переходят на правило 2, то, взяв $Q(N+1)$ за новое начальное состояние, вновь получим предельный цикл из d векторов. Верхняя граница суммарного ресурса, при котором все вершины функционируют по правилу 2, равна T . T существует для любой сети.

Докажем, что значение T единственно и не зависит от начального состояния. При $W = T$ по крайней мере одна вершина имеет ресурс, равный своей выходной пропускной способности. Пусть это вершина v_j . Для нее $q_j^* = r_j^{out}$ в каждом из d предельных векторов.

Матрица R' – импримитивна с индексом импримитивности d . Это означает, что ее степень R'^d разлагается в прямую сумму d регулярных матриц, соответствующих циклическим классам $R'_{ii}{}^d$ (см. лемму 5.1). Предельные векторы сети выражаются через собственные векторы этих матриц. Вершина v_j является потенциальным аттрактором в некотором циклическом классе с номером i . Если с первого такта все вершины функционировали по правилу 2, для него выполняется: $Q_i(0)R'_{ii}{}^\infty = Q_{di}^* = W_i\pi_i$, где W_i – суммарный ресурс в i -м циклическом классе, π_i – вектор предельных вероятностей соответствующей цепи Маркова. Для сети, описываемой регулярной матрицей $R'_{ii}{}^d$, пороговое значение существует и единственно. Обозначим его через T_i . Тогда при $W_i = T_i$ имеем $(q_{di}^*)_j = r_j^{out}$, где $(q_{di}^*)_j$ – j -я компонента вектора Q_{di}^* . Но чтобы ресурс вершины v_j был равен r_j^{out} на каждом такте, суммарный ресурс i -го циклического класса должен быть равен T_i также на каждом такте. Если сеть функционирует по правилу 2, ресурс циркулирует по циклическим классам, не перемешиваясь. Если

раскрасить ресурс в каждом классе в свой цвет, ресурсы разных цветов на любом такте будут целиком в одном классе. Пороговое значение T определяется как максимальный ресурс, при котором все вершины функционируют по правилу 2 при $t \rightarrow \infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ каждый циклический класс на каждом такте должен содержать T_i ресурса. А пороговое значение ресурса сети вычисляется по формуле: $T = dT_i$.

Поскольку каждая компонента имеет одинаковое количество ресурса, поток в сети стабилизируется, и все предельные векторы одинаковы.

При $W > T$ как минимум один аттрактор (пусть это вновь будет вершина v_j) за конечное число тактов переходит на правило 1. То есть, существует такой момент времени t' , что при $t \geq t'$ вершина v_j функционирует по правилу 1. На каждом такте она отдает ресурс, равный r_j^{out} , получает ресурс, не меньший r_j^{out} . Тогда в нее можно добавить петлю с пропускной способностью $q_j(t') - r_j^{out}$, по которой на каждом такте будет проходить неотрицательный поток, равный $q_j(t') - r_j^{out}$. Функционирование сети при этом не изменится. Но наличие петли влечет за собой потерю цикличности, и сеть превращается в регулярную. В регулярной сети поток существует и единственен. Предельное состояние единственно во всех вершинах, кроме потенциальных аттракторов. Если в сети единственный аттрактор, предельное состояние также единственно. \square

5.3.2. Критерий аттрактивности и потенциальные аттракторы

Докажем, что для вершин в произвольной d -циклической сети выполняется тот же критерий аттрактивности, что и для вершин в несимметричной регулярной сети.

Теорема 5.3. В эргодической d -циклической ресурсной сети вершина v_j является потенциальным аттрактором, если и только если

$$j = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}, \text{ где вектор } Q^{1*} \text{ определяется по формуле}$$

$$(5.13) \quad Q^{1*} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d Q_k^{1*},$$

векторы Q_k^{1*} ($k = 0, \dots, d$) – предельные векторы при $W = 1$ и произвольном начальном состоянии.

Доказательство. Из теоремы 5.2 следует, что при $W = T$ предельное состояние сети при любом начальном состоянии единственно, и все ее d предельных векторов равны. Но для $W \leq T$ выполняется равенство: $Q_1^* + \dots + Q_d^* = dTQ^{1*}$, где вектор Q^{1*} , вычисляемый по формуле (5.13), – единственный положительный собственный вектор стохастической матрицы R' . Непосредственно отсюда следует, что предельное состояние сети $Q^* = Q_1^* = \dots = Q_d^* = TQ^{1*}$. Таким образом, функционирование сети начинает описываться регулярной матрицей A , состоящей из n строк Q^{1*} :

$$A = \mathbf{1} \cdot Q^{1*}.$$

Для сети, функционирование которой описывается матрицей A , справедливы все результаты, полученные для регулярных сетей. Таким образом, для того, чтобы вершина v_j была аттрактором, необходимо и достаточно выполнение условия $j = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ (теорема 3.4, глава 3). \square

С л е д с т в и е 5.1. В эйлеровых d -циклических сетях при больших ресурсах предельное состояние полностью зависит от начального, так как каждая вершина в них – потенциальный аттрактор.

С л е д с т в и е 5.2. В эргодической d -циклической ресурсной сети пороговое значение T определяется по формуле: $T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$.

5.3.3. Предельное состояние и предельный поток при больших ресурсах

Обобщив полученные результаты, сформулируем для циклических сетей теоремы о предельном состоянии и потоке при $W > T$, аналогичные

теоремам о регулярных сетях. Их доказательства следуют из теорем 5.2–5.3 и следствия 5.2.

Теорема 5.4 (о предельном состоянии). В эргодической d -циклической ресурсной сети при $W \geq T$ значения неаттрактивных компонент вектора предельного состояния $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ вычисляются по формуле

$$q_i^* = q_i^{1^*} \cdot T,$$

где:

1) $i \neq j_k$, j_k – номера аттракторов, определяющиеся из условия:

$$j_k = \arg \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1^*}},$$

2) вектор Q^{1^*} определяется по формуле (5.13),

$$3) T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1^*}},$$

Оставшийся ресурс распределяется между потенциальными аттракторами.

Проиллюстрируем теорему следующим примером.

Пример 5.11. Рассмотрим функционирование неоднородной сети, содержащей циклы с общими ребрами.

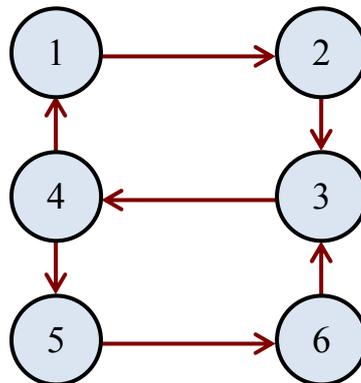


Рис. 5.12. Циклы с общими ребрами

В этой сети четыре циклических множества: $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3\}$ и $\{v_4\}$. Пусть матрица пропускных способностей сети имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot r_{sum} = 18.$$

Тогда при помещении в начальном состоянии ресурса $W = 1$ в любую из шести вершин, предельные векторы будут:

$$Q_1^{1*} = (0,286, 0, 0, 0, 0,714, 0), Q_2^{1*} = (0, 0,286, 0, 0, 0, 0,714),$$

$$Q_3^{1*} = (0, 0, 1, 0, 0, 0), Q_4^{1*} = (0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Собственный вектор стохастической матрицы находится как их среднее арифметическое (формула (5.13)):

$$Q^{1*} = (0,0715, 0,0715, 0,25, 0,25, 0,1785, 0,1785).$$

Вычислим значение отношения $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ для каждой вершины.

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} \approx \frac{1}{0,0715} \approx 14, \quad \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} \approx \frac{3}{0,0715} \approx 42, \quad \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} \approx \frac{2}{0,25} = 8, \quad \frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} \approx \frac{7}{0,25} = 28,$$

$$\frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} \approx \frac{4}{0,1785} \approx 22,4, \quad \frac{r_6^{out}}{q_6^{1*}} \approx \frac{1}{0,1785} \approx 5,6.$$

Минимум $\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ достигается в вершине v_6 .

Таким образом, v_6 – единственный потенциальный аттрактор этой сети.

По следствию 5.2 из теоремы 5.2 $T \approx 5,6$.

При $W = T$ предельное состояние при любом начальном:

$$\tilde{Q} = (0,4, 0,4, 1,4, 1,4, 1, 1).$$

Этому же вектору равны предельные входной и выходной потоки.

При $W > T$, излишек ресурса скапливается в аттракторе, остальные компоненты предельного вектора остаются неизменными. Например, при $W = 20$, при любом начальном состоянии предельное состояние равно

$$Q^* = (0,4, 0,4, 1,4, 1,4, 1, 15,4).$$

Излишек ресурса аккумулировался в аттракторе. Остальные компоненты предельного вектора не изменились.

Теорема 5.5 (о предельном потоке). В эргодической d -циклической ресурсной сети при $W \geq T$ предельный поток существует и единственен и определяется по формуле:

$$f_i^{in*} = f_i^{out*} = q_i^{1*} T; F^{in*} = F^{out*} = Q^{1*} T = \tilde{Q},$$

где

1) вектор Q^{1*} определяется по формуле (5.13),

$$2) T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

З а м е ч а н и е. В регулярных сетях при разделении ресурса на «малый» и «большой», пороговое значение T , по которому проходит эта граница, относился к малым ресурсам. Это связано с тем, что при $W = T$ сеть описывается регулярной цепью Маркова, как и при меньших значениях суммарного ресурса, и предельное состояние в ней единственно. Т.е. в регулярных сетях суммарный ресурс разбивается на интервалы $W \leq T$ и $W > T$. В циклических сетях значение T входит в «большой» ресурс, так как при $W \geq T$ сеть имеет предельное состояние, в то время как при $W < T$ – лишь предельный цикл из d предельных векторов.

Выводы

1. Введено понятие d -циклических ресурсных сетей.
2. Исследованы элементарные циклы. Для них найден критерий существования равновесного состояния при малых ресурсах и вектор равновесного состояния; исследованы колебательные процессы, найдены предельные векторы, циклически сменяющие друг друга; найдена формула вычисления порогового значения ресурса T ; найдено предельное состояние и предельный поток при $W = T$; доказаны существование предельного

состояния и потока при $W > T$; найден вектор предельного потока. Доказано, что предельный поток при $W > T$ единствен, предельное состояние единственно в том и только в том случае, когда сеть имеет один потенциальный аттрактор. Найден критерий аттрактивности вершин; и необходимое и достаточное условие активности каждого аттрактора.

3. Исследовано функционирование циклических ресурсных сетей при малых ресурсах. Показано, что при $t \rightarrow \infty$ состояния сети представляют собой d чередующихся предельных векторов, образующих предельный цикл. Показано, что все предельные векторы являются собственными векторами предельной матрицы R'_d , соответствующими собственному числу $\lambda = 1$ кратности d .

5. Найдено условие на начальное состояние, при выполнении которого процесс перераспределения ресурса при $W < T$ сходится к равновесному состоянию. Показано, что равновесный вектор является единственным положительным собственным вектором матрицы R' .

6. Доказано, что в циклических сетях, как и в регулярных, существует единственное пороговое значение ресурса T , при превышении которого по крайней мере одна вершина сети переходит на правило 1. Найдена формула для T .

7. Сформулирован и доказан критерий аттрактивности вершины в произвольной d -циклической эргодической сети.

8. Сформулированы и доказаны теоремы о предельном состоянии и потоке при $W \geq T$.

ГЛАВА 6. ПОГЛОЩАЮЩИЕ СЕТИ

Поглощающими ресурсными сетями называются сети со стоковыми вершинами, т.е. с вершинами, не имеющими исходящих ребер, кроме, возможно, петли. Основные определения, касающиеся поглощающих сетей, были даны в главе 1. Там же было показано, что изучение любой сети, состоящей из переходной компоненты и одной или нескольких эргодических компонент, можно свести к отдельному изучению эргодических компонент и поглощающей сети, где вместо каждой эргодической компоненты будет единственная вершина-сток.

6.1. Свойства поглощающих ресурсных сетей

Пусть поглощающая сеть имеет l стоков с номерами от 1 до l . Ее матрицу пропускных способностей можно представить в блочном виде:

$$(6.1) \quad R = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array} \right),$$

где D – диагональная матрица размера $l \times l$ с произвольными неотрицательными диагональными элементами, равными пропускным способностям петель в стоках, O_1 – нулевая матрица размера $l \times (n - l)$, R_1 – матрица размера $(n - l) \times l$, и R_2 – квадратная матрица $(n - l) \times (n - l)$. Матрица R_1 состоит из пропускных способностей ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки, матрица R_2 – из пропускных способностей ребер, соединяющих вершины внутри переходной компоненты.

Стохастическая матрица R' , соответствующая такой матрице R , будет иметь вид

$$(6.2) \quad R' = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1' & R_2' \end{array} \right).$$

Причем, даже если матрица D имеет на диагонали нулевые элементы (т.е. одна или несколько стоковых вершин не имеют петель), тем не менее, блок матрицы R' , соответствующий D , будет единичной матрицей. Во-

первых, с формальной точки зрения, это поддерживает стохастические свойства матрицы R' , а во-вторых, фактически матрица E_1 отвечает за то, что весь ресурс в стоках остается в них, независимо от наличия петель.

Перечислим свойства поглощающих сетей, вытекающие непосредственно из их топологии.

Свойство 6.1. Предельное состояние в поглощающих сетях существует. Координаты вектора предельного состояния, соответствующие переходной компоненте, равны нулю. Предельный поток состоит из потока в петлях стоковых вершин.

Доказательство этого свойства очевидно. В переходной компоненте на каждом такте количество ресурса падает и асимптотически стремится к нулю. Если вершины из переходной компоненты не имеют петли и не обмениваются ресурсом друг с другом, ресурс покидает эту компоненту за конечное время. \square

Из этого свойства следует, что если сеть не имеет петель, предельный поток в ней равен нулю, то есть, функционирование сети останавливается, чего в регулярных и эргодических сетях не происходит никогда. Если в стоках имеются петли, ресурс циркулирует только по ним; поток в петлях переходных вершин стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Свойство 6.2. Наличие или отсутствие петель в стоках не влияет на количество ресурса в стоках в предельном состоянии при неизменном начальном состоянии.

Доказательство. Петля отвечает за то, какое количество ресурса не покинет вершину, но поскольку у стока нет исходящих ребер, то весь ресурс, пришедший туда, больше никуда не уходит. Наличие или отсутствие петли, а также ее пропускная способность, не влияют на количество ресурса в вершине. \square

Справедлив и гораздо более сильный результат.

Свойство 6.3. Наличие или отсутствие петель в переходных вершинах никак не влияет на количество ресурса в стоках в предельном состоянии при неизменном начальном состоянии.

Свойства 6.2 и 6.3 вытекают из теорем 6.3 и 6.4, доказанных ниже. Хотя доказательство этих теорем нетривиально, физический смысл нагляден. Петли в стоках не влияют на функционирование сети, поскольку из стоковых вершин ресурс не выходит. Петли в переходных вершинах задерживают распределение ресурса, но не нарушают пропорции, в которой он распределяется в исходящие ребра. Таким образом, координаты предельного вектора, соответствующие стоковым вершинам, остаются неизменными.

Пример 6.1. Рассмотрим сеть с пятью вершинами, две из которых, v_1 и v_2 , являются стоками. Ее матрица пропускных способностей имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Все диагональные элементы этой матрицы отличны от нуля, т.е. все вершины имеют петли. Пусть начальное состояние $Q(0) = (0, 0, 30, 10, 10)$. Предельное состояние будет: $Q^* = (26.428, 23.572, 0, 0, 0)$.

Функционирование сети представлено на рис. 6.1.

Если убрать из сети все петли, диагональные элементы матрицы R станут равны нулю:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Начальное состояние $Q(0) = (0, 0, 30, 10, 10)$ приведет к такому же предельному состоянию $Q^* = (26.428, 23.572, 0, 0, 0)$ за несколько меньшее число шагов (рис. 6.2).

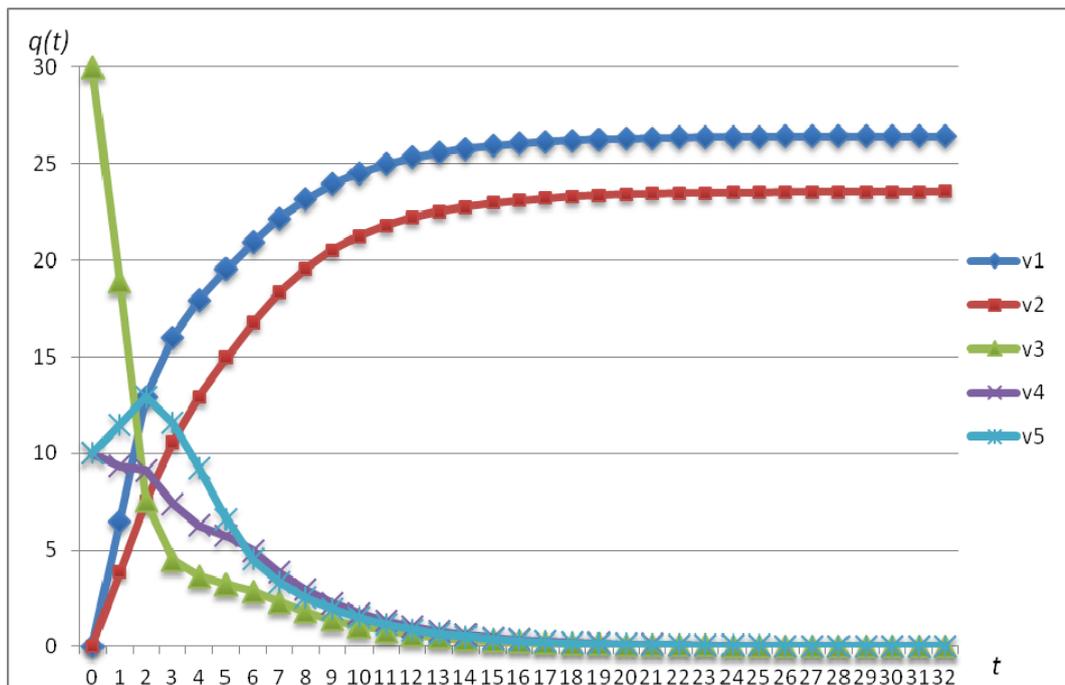


Рис. 6.1. Функционирование поглощающей сети с петлями

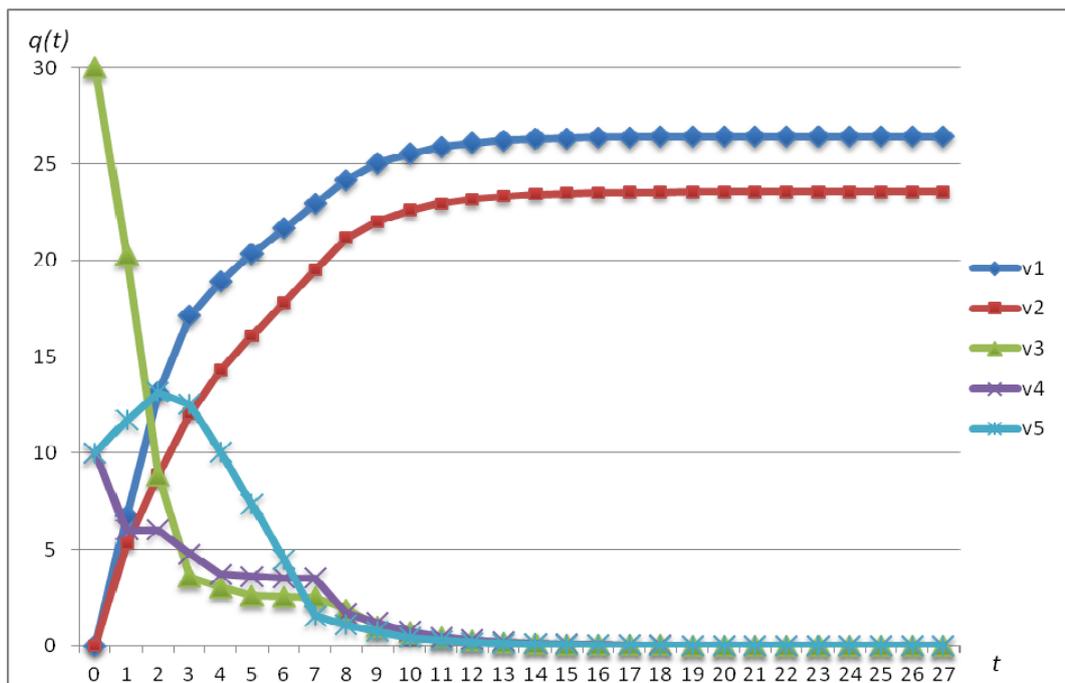


Рис. 6.2. Функционирование поглощающей сети без петель

Из этих рисунков видно, что хотя относительная пропускная способность петель в первом случае была достаточно велика, распределение ресурса в сети с петлями и без петель имеет мало отличий.

В поглощающей сети с несколькими стоками и произвольными пропускными способностями ребер в общем случае предельное состояние полностью зависит от начального при любом суммарном ресурсе.

Этим свойством поглощающие сети отличаются от всех остальных. Ни при каких ресурсах в отличие от регулярных сетей они не имеют единственного предельного состояния. Однако есть частные случаи поглощающих сетей с несколькими стоками, в которых предельное состояние не зависит от начального.

6.2. Поглощающие сети с единственным предельным состоянием

Рассмотрим поглощающую сеть, матрица пропускных способностей которой имеет вид:

$$(6.3) \quad R = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline H & R_2 \end{array} \right),$$

Ее отличие от матрицы (1) заключается в блоке H – он имеет ранг, равный единице: $\text{rank } H = 1$. Это означает, что пропускные способности ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки, пропорциональны.

Теорема 6.1. В поглощающей сети с матрицей (6.3), в которой $\text{rank } H = 1$, для любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), \dots, q_l(0), q_{l+1}(0), \dots, q_n(0))$ предельное состояние определяется формулой:

$$(6.4) \quad Q^* = \left(q_1(0) + \frac{h_1^{in}}{h_{sum}} W^-, \dots, q_l(0) + \frac{h_l^{in}}{h_{sum}} W^-, 0, \dots, 0 \right),$$

где $W^- = \sum_{i=l+1}^n q_i(0)$, h_j^{in} – сумма j -го столбца матрицы H , h_{sum} – сумма всех элементов матрицы H .

Доказательство.

1. Вклады в предельный ресурс $q_1(0), \dots, q_l(0)$ очевидны, так как ресурс из стока выйти не может.

2. Если ранг матрицы равен 1, то все ее строки и столбцы пропорциональны. Матрицу H можно записать в виде:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \alpha_2 h_1 & \dots & \alpha_l h_1 \\ h_2 & \alpha_2 h_2 & \dots & \alpha_l h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-l} & \alpha_2 h_{n-l} & \dots & \alpha_l h_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Если некоторая вершина v_j из переходной компоненты функционирует по правилу 1, она будет отдавать в стоки ресурс, равный пропускным способностям ребер: $h_j, \alpha_2 h_j, \dots, \alpha_l h_j$. Т.е. в каждый сток он попадет в пропорции $1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_l$. Если вершина функционирует по правилу 2, она

отдает в стоки ресурс, равный $\left(\frac{h_j}{h_j^{out}} q_j(t), \frac{h_j \alpha_2}{h_j^{out}} q_j(t), \dots, \frac{h_j \alpha_l}{h_j^{out}} q_j(t) \right)$, и стоки

получат ресурс в той же пропорции $1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_l$. Тогда суммарный входящий ресурс в стоках на каждом такте также делится в соотношении $1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_l$. Соответственно, в такой же пропорции он распределится между стоками в предельном состоянии. То есть, ресурс, пришедший в стоки из переходной компоненты, будет равен:

$$\frac{1}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l} W^-, \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l} W^-, \dots, \frac{\alpha_l}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l} W^-.$$

Входные пропускные способности стоков равны соответственно:

$$h_1^{in} = h_1 + h_2 + \dots + h_{n-l},$$

$$h_k^{in} = \alpha_k (h_1 + h_2 + \dots + h_{n-l}), k = 2, \dots, l.$$

Суммарная пропускная способность матрицы H :

$$h_{sum} = (h_1 + h_2 + \dots + h_{n-l})(1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l).$$

$$\frac{h_1^{in}}{h_{sum}} = \frac{1}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}, \frac{h_2^{in}}{h_{sum}} = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}, \dots, \frac{h_l^{in}}{h_{sum}} = \frac{\alpha_l}{1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l},$$

откуда и вытекает формула (6.4). \square

С л е д с т в и е 1. Если в начальном состоянии весь ресурс находится в переходной компоненте, то предельное состояние единственно и не зависит от начального распределения ресурса по вершинам.

Следствие 2. Из формулы предельного состояния видно, что матрица R_2 в сети с $\text{rank } H = 1$ может быть любой. Перетоки ресурса внутри переходной компоненты никак не влияют на предельное состояние.

Проиллюстрируем теорему 6.1 примерами.

Пример 6.2. Матрица 7×7 с тремя стоками v_1, v_2, v_3 .

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица H в этом примере состоит из одинаковых элементов. Распределение любого ресурса W в любой пропорции между вершинами v_4, \dots, v_7 приводит к предельному состоянию $Q^* = \left(\frac{W}{3}, \frac{W}{3}, \frac{W}{3}, 0, 0, 0, 0\right)$. На рис. 6.3 представлено перераспределение ресурса, равного 30, и в начальном состоянии находящегося в переходной компоненте.

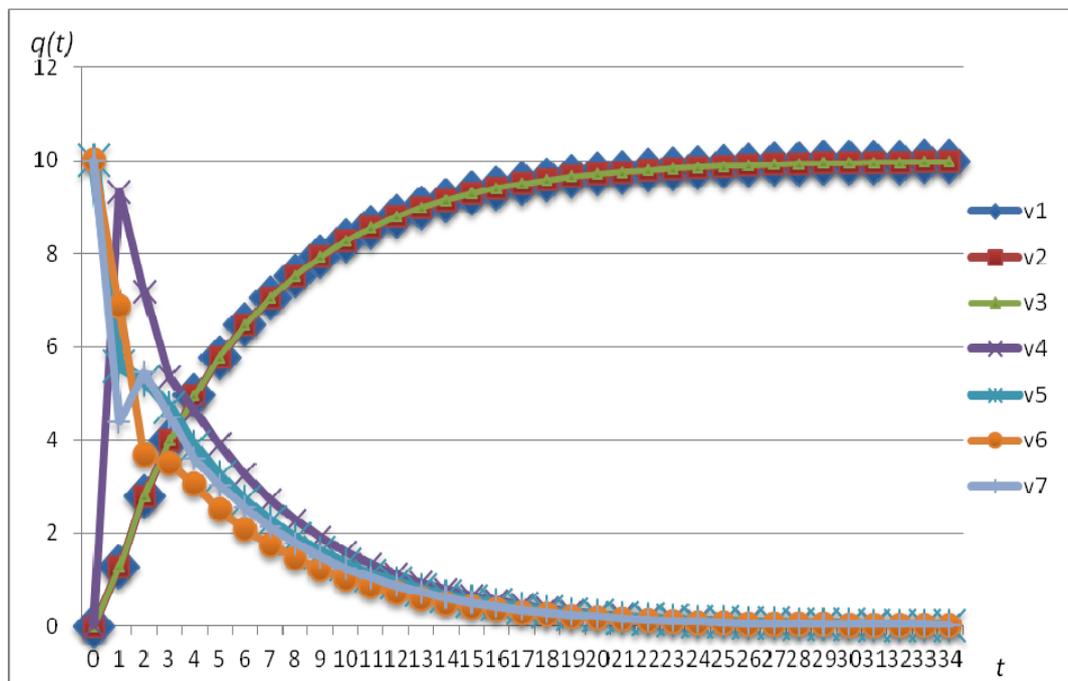


Рис. 6.3. Функционирование поглощающей сети $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 10, 10, 10) \rightarrow Q^* = (10, 10, 10, 0, 0, 0, 0)$

Рассмотрим случай, когда все входные пропускные способности стоков разные, но ранг матрицы H по-прежнему равен единице.

Пример 6.3. Сеть задана матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 14 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 21 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 28 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

При распределении любого ресурса W в любой пропорции между четырьмя переходными вершинами предельное состояние будет:

$$Q^* = \left(\frac{W}{10}, \frac{2W}{10}, \frac{7W}{10}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

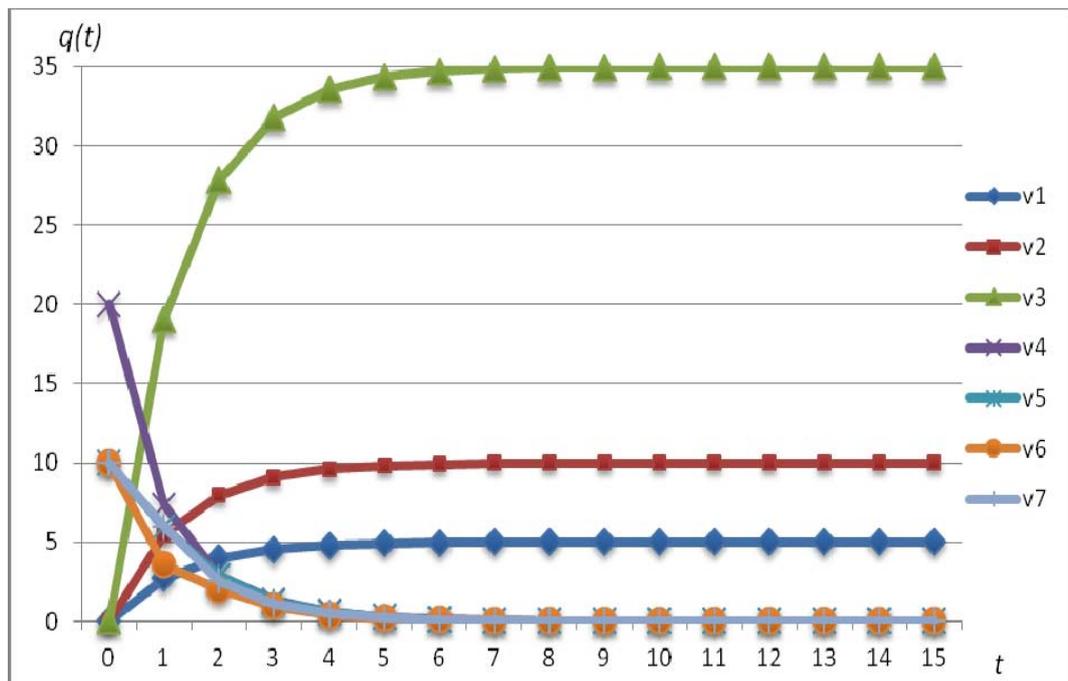


Рис. 6.4. Функционирование поглощающей сети с тремя стоками и матрицей H , имеющей ранг 1. $Q(0) = (0, 0, 0, 20, 10, 10, 10) \rightarrow Q^* = (5, 10, 35, 0, 0, 0, 0)$

6.3. Поглощающие сети общего вида. Пороговое значение T

Будем рассматривать произвольные поглощающие сети, наложив на них единственное ограничение: переходная компонента должна быть

регулярной, т.е. существует такое $k \geq 1$, что матрица R_2^k строго положительна.

Если матрица R_1 имеет ранг больше единицы, распределение ресурса в предельном состоянии всегда зависит от начального. При этом элементы матрицы R_2 тоже начинают играть роль в формировании предельного состояния.

Пример 6.4. Пусть одна пропускная способность в матрице H из примера 6.2 отлична от остальных.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Помещая ресурс, равный единице, поочередно в каждую из переходных вершин, найдем предельные состояния.

$$Q(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow Q^* = (0.280, 0.440, 0.280, 0, 0, 0, 0)$$

$$Q(0) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \rightarrow Q^* = (0.290, 0.420, 0.290, 0, 0, 0, 0)$$

$$Q(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow Q^* = (0.282, 0.436, 0.282, 0, 0, 0, 0)$$

$$Q(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow Q^* = (0.232, 0.536, 0.232, 0, 0, 0, 0)$$

При этом никакое увеличение ресурса (вплоть до r_{sum} и выше) не нарушает указанных пропорций.

При изменении хотя бы одного из недиагональных элементов матрицы R_2 , предельное состояние тоже изменяется. Таким образом, в поглощающей сети с произвольной топологией предельное состояние всегда зависит от начального.

Из сказанного вытекает еще одно основное отличие поглощающих ресурсных сетей от регулярных и эргодических – они не имеют порогового значения T .

Асимптотические процессы в поглощающих сетях при любом ресурсе остаются одинаковыми: при пропорциональном увеличении компонент вектора начального состояния, каждая компонента вектора предельного состояния увеличивается в той же пропорции.

Теорема 6.2. В поглощающей сети порогового значения ресурса T не существует.

Доказательство. По определению пороговое значение T – это такое количество ресурса, что при $W > T$ для некоторого момента времени t' и некоторой вершины v_i выполняется: $\forall t > t' \quad v_i \in Z^+(t)$. В поглощающих сетях такими вершинами могут быть только стоки. Но принадлежность вершины зоне $Z^+(t)$ означает, что ее ресурс превосходит ее выходную пропускную способность r_i^{out} . Однако стоки не имеют исходящих ребер, кроме, возможно, петли, наличие или отсутствие которой не влияет на функционирование сети. Добавляя и убирая петли в стоки и изменяя их пропускные способности, можно получить сети с разным значением T , при котором хотя бы один сток перейдет на правило 1, но с одинаковым функционированием при любом суммарном ресурсе. Это и означает отсутствие порога в таких сетях. \square

Замечание 6.1. В регулярных и эргодических сетях значение T рассчитывается по формуле: $T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$, и $\min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ достигается на всех

вершинах-аттракторах. В поглощающих сетях отношение $T_i = \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$

принимает разные значения на разных стоках (хотя все они являются аттракторами) и обращается в нуль на стоках без петель. В остальных вершинах это отношение равно бесконечности. В регулярных сетях для любой вершины T_i – положительно и конечно.

З а м е ч а н и е 6.2. Коэффициент симметричности, определенный во второй главе, как отношение $\chi = \frac{T}{r_{sum}}$, при $T = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ обращается в нуль на стоках без петель (а по свойству 6.2 петлями в стоках можно пренебречь). Для всех регулярных сетей $\chi \in (0, 1]$. В поглощающих сетях значение $\chi = 0$, что соответствует «полностью несимметричной» сети.

З а м е ч а н и е 6.3. В регулярных сетях при $W \leq T$:

- 1) все вершины за конечное число шагов переходят на правило 2;
- 2) предельное состояние единственно.

В поглощающей сети с произвольной матрицей пропускной способности предельное состояние не единственно ни при каком значении суммарного ресурса; а если $\text{rank } H = 1$, единственно при всех значениях. В этом смысле порогового значения в таких сетях также не существует.

6.4. Предельные состояния в поглощающих сетях

6.4.1. Матрица R'^{∞} и ее свойства

Найдем предельную матрицу произвольной поглощающей сети R'^{∞} и опишем ее свойства.

Л е м м а 6.1. Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей (6.1). Тогда R'^{∞} – предел степеней стохастической матрицы R' , определяется по формуле:

$$(6.5) \quad R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1} R_1' & O_2 \end{array} \right),$$

где E_2 – единичная матрица размера $(n - l) \times (n - l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Степени матрицы R' имеют вид:

$$R'^k = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1' + R_2' R_1' + (R_2')^2 R_1' + \dots + (R_2')^{k-1} R_1' & (R_2')^k \end{array} \right).$$

В главе 4 аналогично выражались степени переходной матрицы P для потоков в эйлеровых сетях.

Для цепи Маркова $(R_2')^k \rightarrow O_2$ при $k \rightarrow \infty$, где O_2 – нулевая матрица размера $(n-l) \times (n-l)$; $\sum_{k=0}^{\infty} (R_2')^k = (E_2 - R_2')^{-1}$, причем, матрица $(E_2 - R_2')^{-1}$ существует [75] (теоремы 3.1.1 и 3.2.1).

Тогда: $R_1' + R_2' R_1' + (R_2')^2 R_1' + \dots + (R_2')^k R_1' + \dots = (E_2 - R_2')^{-1} R_1'$, и матрица R^{∞} имеет вид:

$$R^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1} R_1' & O_2 \end{array} \right). \quad \square$$

Замечание 6.4. Из формулы (6.5) следует, что $R^{\infty} = (P^{\infty})^T$, где матрица P^{∞} определяется по формуле (4.11).

Теорема 6.3. В поглощающей сети с l стоками матрица R^{∞} остается неизменной при любых изменениях диагональных элементов.

Доказательство.

Матрице R , заданной формулой (6.1), соответствует стохастическая матрица

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1' & R_2' \end{array} \right).$$

1. Для изменения диагональных элементов матрицы D доказательство очевидно.

2. Докажем это утверждение для диагональных элементов матрицы R_2 .

Пусть $R_{2new} = R_2 - D(\Delta r_{ii})$, где $D(\Delta r_{ii})$ – диагональная матрица размера $(n-l) \times (n-l)$, элементы которой характеризуют изменение пропускных способностей петель. Будем предполагать, что $0 \leq \Delta r_{ii} \leq r_{ii}$, и хотя бы для одной вершины выполнится строгое неравенство: $\Delta r_{kk} > 0$. Если для некоторой вершины v_k выполняется равенство $\Delta r_{kk} = r_{kk}$, петля этой вершины исчезает вообще.

Тогда новая матрица пропускных способностей сети будет:

$$R_{new} = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1' & R_{2new} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} O_3 & O_1 \\ \hline O_4 & D(\Delta r_{ii}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1' & R_{2new} \end{array} \right).$$

Стохастическая матрица, соответствующая матрице R_{new} , будет отлична от R' .

Зависимость между матрицами R'_1 и R'_2 и матрицами R'_{1new} и R'_{2new} следующая:

$$(6.6) \quad R'_{1new} = D \left(\frac{r_i^{out}}{r_i^{out} - \Delta r_{ii}} \right) R'_1, \quad R'_{2new} = D \left(\frac{r_i^{out}}{r_i^{out} - \Delta r_{ii}} \right) \cdot \left(R'_2 - D \left(\frac{\Delta r_{ii}}{r_i^{out}} \right) \right),$$

где $D \left(\frac{r_i^{out}}{r_i^{out} - \Delta r_{ii}} \right)$ – диагональная матрица размера $(n-l) \times (n-l)$ с элементами $\frac{r_i^{out}}{r_i^{out} - \Delta r_{ii}}$. Именно в такой пропорции пересчитываются

элементы двух нижних блоков матрицы R' . Обозначим ее через D' ; $D \left(\frac{\Delta r_{ii}}{r_i^{out}} \right)$ – диагональная матрица, соответствующая изменению матрицы R'_2 после изменения пропускных способностей петель. Обозначим ее через D_Δ .

Тогда равенства (6.6) можно переписать в более компактном виде:

$$R'_{1new} = D' R'_1, \quad R'_{2new} = D' \cdot (R'_2 - D_\Delta).$$

Новая матрица $R'_{new} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_{1new} & R'_{2new} \end{array} \right)$ по-прежнему остается

стохастической, и поэтому предел ее степеней существует и равен:

$$R'_{new}{}^\infty = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_{2new})^{-1} R'_{1new} & O_2 \end{array} \right).$$

Выразим $(E_2 - R'_{2new})^{-1} R'_{1new}$ через исходные матрицы. Из (6.6) имеем:

$$(6.7) \quad (E_2 - R'_{2new})^{-1} R'_{1new} = (E_2 - D' (R'_2 - D_\Delta))^{-1} D' R'_1.$$

Все диагональные элементы матрицы D' отличны от 0. Это означает, что матрица D'^{-1} существует. Тогда в первом множителе правой части равенства (6.7) D' можно внести в скобку:

$$\begin{aligned} (E_2 - D'(R'_2 - D_\Delta))^{-1} D' R'_1 &= (D'^{-1} E_2 - D'^{-1} D'(R'_2 - D_\Delta))^{-1} R'_1 = \\ &= (D'^{-1} - (R'_2 - D_\Delta))^{-1} R'_1 = (D'^{-1} + D_\Delta - R'_2)^{-1} R'_1. \end{aligned}$$

Вычислим сумму $D'^{-1} + D_\Delta$.

Это две диагональные матрицы. Элементы матрицы D' равны $\frac{r_i^{out}}{r_i^{out} - \Delta r_{ii}}$, тогда соответствующие элементы D'^{-1} равны $\frac{r_i^{out} - \Delta r_{ii}}{r_i^{out}}$.

Элементы D_Δ равны $\frac{\Delta r_{ii}}{r_i^{out}}$.

Для каждого i выполнится: $\frac{r_i^{out} - \Delta r_{ii}}{r_i^{out}} + \frac{\Delta r_{ii}}{r_i^{out}} = 1$. Отсюда

$$(D'^{-1} + D_\Delta - R'_2)^{-1} R'_1 = (E_2 - R'_2)^{-1} R'_1, \text{ а это означает, что}$$

$$(E_2 - R'_{2new})^{-1} R'_{1new} = (E_2 - R'_2)^{-1} R'_1, \text{ и соответственно,}$$

$$R'_{new} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_2)^{-1} R'_1 & O_2 \end{array} \right) = R'^{\infty}.$$

Таким образом, при любых изменениях диагональных элементов матрицы R пределы степеней соответствующих стохастических матриц совпадают, хотя сами стохастические матрицы различны. \square

Пример 6.5. Рассмотрим две сети. Первая представлена матрицей R_+ с диагональными элементами, неравными нулю, вторая – той же матрицей, но с нулевыми диагональными элементами (R_-).

$$R_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad R_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стохастические матрицы, соответствующие им:

$$R'_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{1}{21} & \frac{6}{21} & \frac{6}{21} & \frac{7}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix}, R'_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{15} & \frac{1}{15} & 0 & \frac{3}{15} & \frac{5}{15} \\ \frac{1}{14} & \frac{6}{14} & \frac{6}{14} & 0 & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что матрицы различны, пределы их степеней совпадают. Для них обеих выполнится:

$$R'^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6161 & 0.3839 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3661 & 0.6339 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4286 & 0.5714 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4.2. Вектор предельного состояния и его свойства

Теорема 6.4. Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей (6.1). Тогда для любого ресурса W и любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), \dots, q_n(0))$ предельное состояние рассчитывается по формуле:

$$(6.8) \quad Q^* = Q(0)R'^{\infty},$$

где R'^{∞} – предельная матрица, определяемая по формуле (6.5).

Доказательство.

1. Если начальное состояние таково, что все вершины из переходной компоненты функционируют по правилу 2, доказательство теоремы очевидно. Для каждого t выполнится: $Q(t) = Q(0)R'^t$. Совершив предельный переход, получим искомое равенство (6.8).

2. Пусть вершины из переходной компоненты некоторое число тактов функционируют по правилу 1 (поскольку ресурс безвозвратно уходит в стоки, то такое количество тактов конечно при любом начальном ресурсе).

На каждом такте t построим новую матрицу пропускной способности $R(t)$, отличающуюся от матрицы R только диагональными элементами тех нестоковых вершин, которые функционируют по правилу 1. То есть,

$$r_{ii}(t) = \begin{cases} r_{ii}, & \text{если } q_i(t) \leq r_i^{out}, \\ q_i(t) - \sum_{j \neq i} r_{ij}, & \text{если } q_i(t) > r_i^{out} \end{cases}$$

Нормируя матрицу $R(t)$, получим стохастическую матрицу $R'(t)$, которая задает неоднородную цепь Маркова. Для этих матриц выполняются следующие два условия:

a) $\forall t Q(t+1) = Q(t)R'(t)$;

b) $\forall t$ вектор $Q(t)$ совпадает с вектором состояния сети, заданной матрицей R , с начальным состоянием $Q(0) = (q_1(0), \dots, q_n(0))$.

Тогда функционирование сети описывается правилом:

$$Q(t+1) = Q(t)R'(t) = Q(0)(R'(0)R'(1) \cdots R'(t)).$$

За конечное число шагов m все вершины из переходной компоненты перейдут на правило 2. Тогда, начиная с шага $m+1$ сеть начинает описываться однородной цепью Маркова: $R(t) = R$ и $R'(t) = R'$.

Вектор $Q(m+k)$ можно записать в следующем виде:

$$Q(m+k) = Q(0) \left(\prod_{t=0}^m R'(t) \right) R'^k.$$

При $k \rightarrow \infty$ получим:

$$Q^* = Q(0) \left(\prod_{t=0}^m R'(t) \right) \lim_{k \rightarrow \infty} R'^k = Q(0) \left(\prod_{t=0}^m R'(t) \right) R'^{\infty}.$$

По теореме 6.3 матрица R'^{∞} не изменяется при любых изменениях диагональных элементов.

Тогда для всех $t = 0, \dots, m$ выполнится $R'(t)R'^{\infty} = R'^{\infty}$.

Отсюда $Q^* = Q(0)R'^{\infty}$. \square

С л е д с т в и е 6.1. Вектор предельного состояния Q^ не зависит от наличия или отсутствия петель в вершинах.*

С л е д с т в и е 6.2. Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей (6.1). Тогда элементы i -й строки матрицы R'^{∞} ($i > l$) соответственно равны компонентам вектора предельного состояния при

начальном состоянии $Q_i(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единице равна i -я компонента:

$$R^{\infty} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \dots \\ e_l^T \\ Q_{l+1}^* \\ \dots \\ Q_n^* \end{pmatrix},$$

(e_1, \dots, e_l – первые l вектор-столбцов единичной матрицы $(E)_{n \times n}$).

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (6.8).

Пример 6.6. Сеть представлена матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Стохастическая матрица, соответствующая ей:

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{1}{21} & \frac{6}{21} & \frac{6}{21} & \frac{7}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим предельные состояния, соответствующие начальным состояниям – векторам ортонормированного базиса.

$$Q_1(0) = (0, 0, 1, 0, 0) \rightarrow Q_1^* = (0.6161, 0.3839, 0, 0, 0);$$

$$Q_2(0) = (0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow Q_2^* = (0.3661, 0.6339, 0, 0, 0);$$

$$Q_3(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow Q_3^* = (0.4286, 0.5714, 0, 0, 0).$$

Тогда предел степеней R^{∞} будет:

$$R^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6161 & 0.3839 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3661 & 0.6339 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4286 & 0.5714 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

З а м е ч а н и е. Предельная матрица R^{∞} является собственным проектором лапласовской матрицы $L = E - R'$, описанной в разделе 1.2.4 первой главы. Также этот проектор совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов орграфа, полученного из исходного орграфа сети изменением направлений ребер. Лесная размерность орграфа поглощающей сети, в отличие от эргодических сетей, может быть отлична от единицы и равна количеству стоковых вершин. Предельная матрица R^{∞} может быть найдена с помощью любого аннулирующего многочлена для лапласовской матрицы L . Другие способы нахождения собственного проектора L описаны в [3, 140].

6.4.3. Нелинейное изменение промежуточных состояний

По теореме 6.4 предельное состояние в поглощающей сети зависит от начального состояния линейно. Если начальное состояние описывается вектором $Q(0) = \alpha Q_1(0) + \beta Q_2(0)$, то предельное состояние будет $Q^* = \alpha Q_1^* + \beta Q_2^*$, но для произвольного конечного момента t равенство $Q(t) = \alpha Q_1(t) + \beta Q_2(t)$ выполняется не всегда. Это происходит вследствие нелинейности распределения ресурса при функционировании вершин по разным правилам.

Проиллюстрируем нелинейность поведения сети примером, состоящим из трех частей. Во всех частях сеть задана матрицей пропускных способностей R :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.7.a. Начальное состояние сети $Q_1(0) = (0, 0, 100, 0, 0)$, ему соответствует предельное состояние $Q_1^* = (62.5, 37.5, 0, 0, 0)$. Динамика ресурса представлена на рис. 6.5.

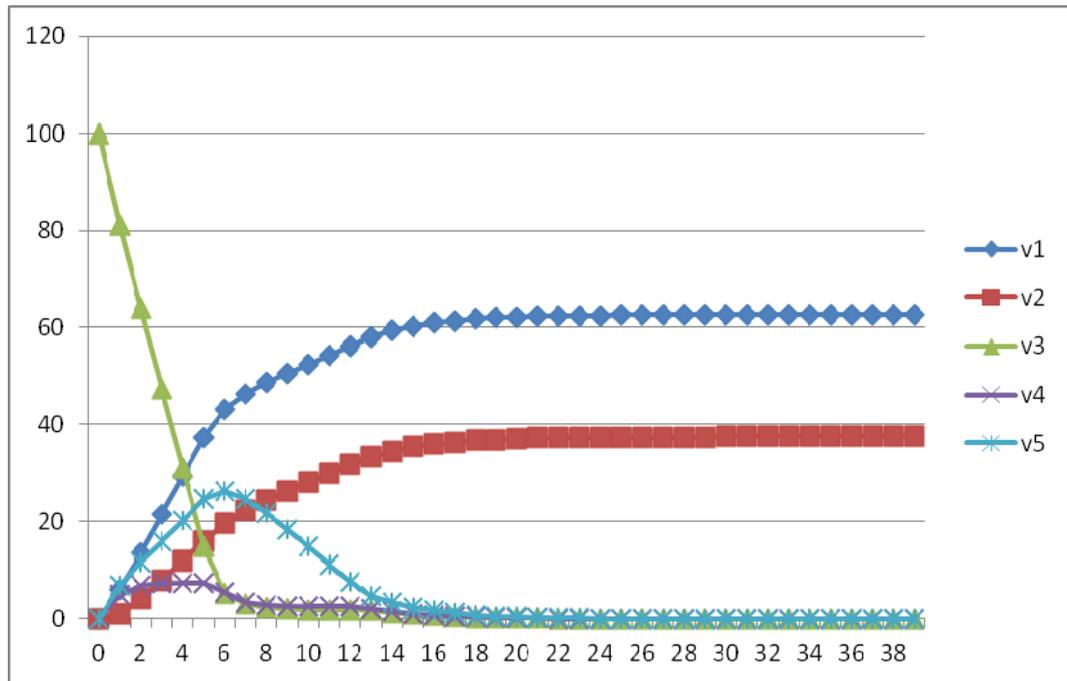


Рис. 6.5. Динамика ресурса в вершинах при начальном состоянии $Q_1(0) = (0, 0, 100, 0, 0)$

Пример 6.7.b. Начальное состояние сети $Q_2(0) = (0, 0, 0, 100, 0)$, ему соответствует предельное состояние $Q_2^* = (46.154, 53.846, 0, 0, 0)$. Динамика ресурса представлена на рис. 6.6.

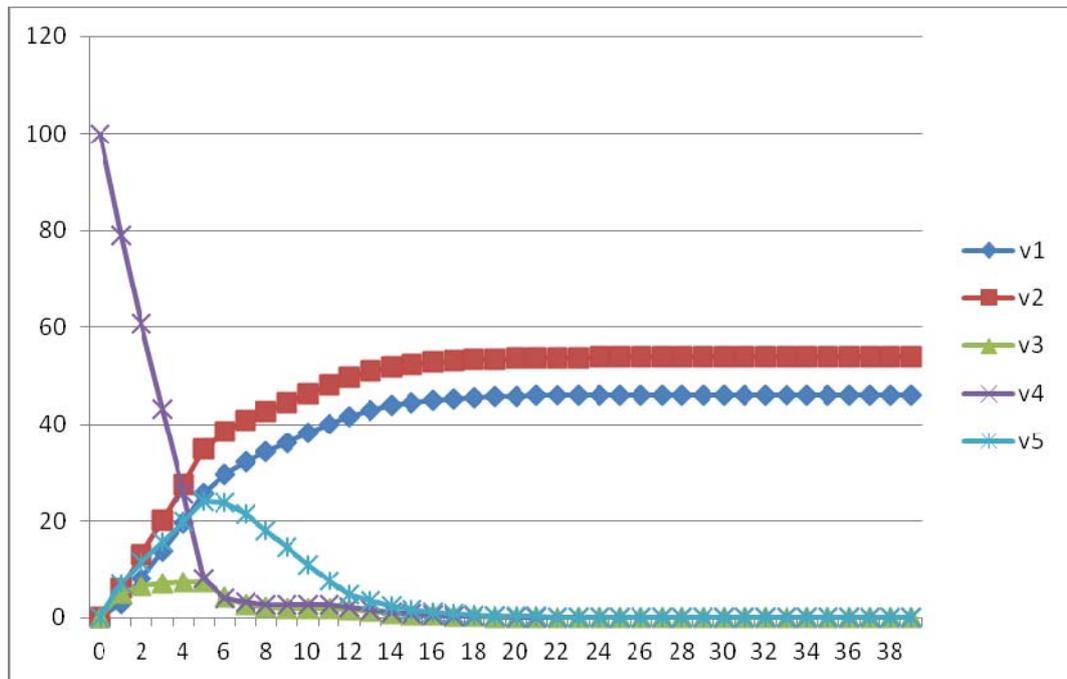


Рис. 6.6. Динамика ресурса в вершинах при начальном состоянии $Q_2(0) = (0, 0, 0, 100, 0)$

Пример 6.7.с. Рассмотрим параллельно два графика, характеризующих динамику ресурса в вершинах. Один – сумма графиков, представленных на рисунках 6.5-6.6; второй – для вектора начального состояния $Q_3(0) = Q_1(0) + Q_2(0) = (0, 0, 100, 100, 0)$.

Из рис. 6.7 (а) и (б) хорошо видно, что графики динамики ресурса во всех пяти вершинах различны. Однако предельные состояния оказываются одинаковыми. Нелинейность проявляется тогда и только тогда, когда хотя бы одна переходная вершина в начальном состоянии имеет ресурс выше своей выходной пропускной способности и функционирует по правилу 1. Если все вершины функционируют по правилу 2, линейность не нарушается, как и в случае регулярных сетей.

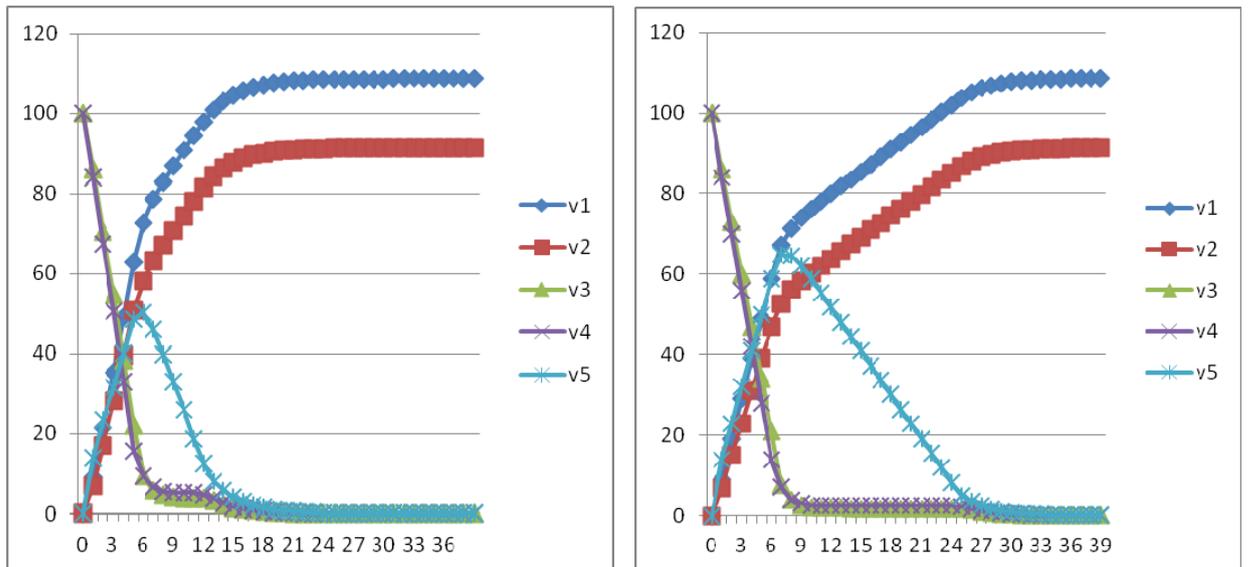


Рис. 6.7. Динамика ресурса в вершинах

(а) Сумма двух протоколов:

$$Q_1(0) + Q_2(0), Q_1(t) + Q_2(t)$$

$$Q_1^* + Q_2^* = (108.654, 91.346, 0, 0, 0)$$

(б) Функционирование с новым начальным состоянием $Q_3(0) = (0, 0, 100, 100, 0)$

$$Q^* = (108.654, 91.346, 0, 0, 0)$$

Выводы

1. Описаны свойства поглощающих ресурсных сетей. Доказано, что предельное состояние в них существует.

2. Доказано, что в поглощающих сетях не существует порогового значения T .

3. Рассмотрен специальный класс поглощающих сетей, в которых предельное состояние единственно и при фиксированном суммарном ресурсе не зависит от начального состояния. Блок H , содержащий пропускные способности ребер между переходной и стоковой компонентами, в таких сетях имеет в них ранг 1. Для таких сетей получена формула предельного состояния, выражающая количество ресурса в стоках только через его начальное количество в них, суммарное значение ресурса в переходной компоненте и элементы матрицы H .

4. Найден предел степеней стохастической матрицы $R^{t \rightarrow \infty}$.

5. Доказана инвариантность матрицы $R^{t \rightarrow \infty}$ относительно любого изменения в диагональных элементах.

6. Доказана теорема о предельном состоянии сети при любой матрице пропускных способностей. Предельное состояние зависит от начального и находится по формуле $Q^* = Q(0)R^{\infty}$. Этот результат отличен от результатов, полученных для регулярных сетей, где при больших ресурсах сеть становится нелинейной. В поглощающих сетях линейность может быть нарушена на конечном отрезке, но вновь восстанавливается в предельном состоянии.

7. Из пп. 5 и 6 следует, что предельное состояние в поглощающей сети не зависит от наличия петель ни в стоковой, ни в переходной компонентах.

ГЛАВА 7. УПРАВЛЕНИЕ В РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ

Для того чтобы в некоторой ресурсной сети можно было поставить задачу управления, необходимо, чтобы предельное состояние в сети зависело от начального. При этом в сети должны быть активные аттракторы – пассивные аттракторы не могут притягивать ресурс. Этим условиям удовлетворяют поглощающие сети с $\text{rank } R_1 > 1$ (при любом значении ресурса) и несимметричные сети с несколькими аттракторами при $W > T$.

7.1. Управление в поглощающих сетях

В предыдущей главе была найдена матрица предельных переходных вероятностей, соответствующая стохастической матрице R' :

$$(7.1) \quad R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1} R_1' & O_2 \end{array} \right).$$

Было доказано, что предельное состояние зависит от начального при любом количестве ресурса в сети, если ранг матрицы $(E_2 - R_2')^{-1} R_1'$ больше единицы. Помещая ресурс в разных пропорциях в вершины из переходной компоненты, можно получить разное распределение его по стокам.

Будем рассматривать задачу управления в поглощающих сетях, в которой переходные вершины являются управляющими, стоки – целевыми вершинами. Управление заключается в распределении ресурса по вершинам переходной компоненты для достижения нужного предельного состояния в стоках. Управляющих воздействий в процессе функционирования сети не происходит: закон сохранения ресурса в сети не нарушается.

Рассмотрим две различные задачи управления, которые назовем *прямой* и *обратной задачей*.

Прямая задача. При заданном количестве суммарного ресурса распределить его в начальном состоянии так, чтобы в предельном состоянии он оказался в стоках в нужной пропорции.

Обратная задача. При заданном желаемом количестве ресурса в одном или нескольких стоках в предельном состоянии определить начальное состояние, при котором для этого потребуется минимальное количество суммарного ресурса.

7.1.1. Прямая задача управления. Распределение фиксированного суммарного ресурса между стоками

Такая постановка задачи управления не всегда имеет точное решение, однако, зная матрицу R'^{∞} и используя свойство линейности оператора перехода в предельное состояние, можно найти начальное состояние, при котором решение будет иметь минимальное расстояние до целевого в евклидовом пространстве. Если целевое предельное состояние $Q^g = (q_1^g, \dots, q_l^g, 0, \dots, 0)$, то задача управления формулируется в виде задачи оптимизации:

$$\|Q^g - Q^*\|_2^2 = (q_1^g - q_1^*)^2 + \dots + (q_l^g - q_l^*)^2 \rightarrow \min$$

Матрица $(E_2 - R_2')^{-1} R_1'$, обладает тем свойством, что сумма элементов любой ее строки равна единице. Таким образом, ее можно назвать квазистохастической («квази» – поскольку в общем случае она не является квадратной).

Введем следующие обозначения:

1) $(E_2 - R_2')^{-1} R_1' = R_{pass}^{\infty}$;

2) подвектор начального состояния с компонентами, соответствующими переходным вершинам, обозначим через $Q_{pass}(0)$, его длина равна $(n - l)$;

3) подвектор предельного состояния, содержащий компоненты стоковых вершин, обозначим через Q_s^* , его длина равна l ;

Целевой вектор Q^g тоже редуцируем до l ненулевых компонент.

По условию задачи $W = \text{const}$, следовательно, векторы $Q_{pass}(0)$, Q_s^* и Q^g можно записать в виде:

$$Q_{pass}(0) = (x_1 W, \dots, x_{n-l} W), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n-l,$$

$$Q_s^* = (\beta_1 W, \dots, \beta_l W), \beta_i > 0, i = 1, \dots, l,$$

$$Q^g = (\gamma_1 W, \dots, \gamma_l W), \gamma_i > 0, i = 1, \dots, l.$$

Тогда справедливо равенство:

$$Q_s^* = Q_{pass}(0) R_{pass}'^{\infty}, \text{ или}$$

$$(\beta_1 W, \dots, \beta_l W) = (x_1 W, \dots, x_{n-l} W) R_{pass}'^{\infty}, \text{ отсюда}$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_l) = (x_1, \dots, x_{n-l}) R_{pass}'^{\infty}; \beta_i = \sum_{j=1}^l x_j (r_{pass}'^{\infty})_{ji}$$

Задача состоит в поиске такого вектора (x_1, \dots, x_{n-l}) , что значение $\|Q^g - Q_s^*\|$ минимально. Отсюда для фиксированного ресурса имеем:

$$\begin{cases} \left\| (\gamma_1, \dots, \gamma_l) - (x_1, \dots, x_{n-l}) R_{pass}'^{\infty} \right\|_2^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^{n-l} x_i = 1, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, l; \sum_{i=1}^l \gamma_i = 1, \gamma_1 : \gamma_2 : \dots : \gamma_l$ – целевая пропорция

распределения ресурса W в стоковых компонентах; $x_1 : x_2 : \dots : x_{n-l}$ – искомая пропорция распределения ресурса W в переходных вершинах,

$$R_{pass}'^{\infty} = (E_2 - R_2')^{-1} R_1'.$$

Поскольку целевая функция квадратична, а ограничения линейны, эта задача относится к задачам квадратичного программирования [82, 160]. Ее нужно решать, только если матрица $R_{pass}'^{\infty}$ имеет ранг, больший единицы. Если $\text{rank } R_{pass}'^{\infty} = 1$, предельное состояние не зависит от начального, и управлять ресурсом нельзя.

Утверждение 7.1. Функция $f(x) = \left\| (\gamma_1, \dots, \gamma_l) - (x_1, \dots, x_{n-l}) R_{pass}'^{\infty} \right\|_2^2$ выпукла.

Доказательство. Докажем, что для любых векторов x и y выполняется неравенство Йенсена:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left\| (\gamma_1, \dots, \gamma_l) - \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \dots, \frac{x_{n-l}+y_{n-l}}{2} \right) R_{pass}'^\infty \right\|_2^2 = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n-l} \frac{x_j+y_j}{2} r_{ji}'^\infty \right)^2 \end{aligned}$$

Для уменьшения громоздкости записи нижний индекс «*pass*» у элементов переходной матрицы будем опускать. Раскрывая квадрат, имеем:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \sum_{i=1}^l \left(\gamma_i^2 - 2\gamma_i \sum_{j=1}^{n-l} \frac{x_j+y_j}{2} r_{ji}'^\infty + \left(\sum_{j=1}^{n-l} \frac{x_j+y_j}{2} r_{ji}'^\infty \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\gamma_i^2 - \gamma_i \sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^\infty - \gamma_i \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}'^\infty + \left(\sum_{j=1}^{n-l} \frac{x_j}{2} r_{ji}'^\infty \right)^2 + \right. \\ &+ \left. 2 \sum_{j=1}^{n-l} \frac{x_j}{2} r_{ji}'^\infty \cdot \sum_{j=1}^{n-l} \frac{y_j}{2} r_{ji}'^\infty + \left(\sum_{j=1}^{n-l} \frac{y_j}{2} r_{ji}'^\infty \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \left(\gamma_i^2 - 2\gamma_i \sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^\infty + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^\infty \right)^2 \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \left(\gamma_i^2 - 2\gamma_i \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}'^\infty + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}'^\infty \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^\infty \cdot \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}'^\infty \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении равно $\frac{f(x)}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^\infty \right)^2$,

второе, соответственно, $\frac{f(y)}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}'^\infty \right)^2$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} \right)^2 - \\
&- \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} \cdot \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}^{\infty} \right) = \\
&= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \\
&- \left(\sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} \cdot \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}^{\infty} \right) + \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}^{\infty} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \left(\sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}^{\infty} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-l} y_j r_{ji}^{\infty} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{f(x) + f(y)}{2} - \left\| \left(\frac{x-y}{2} \right) R_{pass}^{\infty} \right\|_2^2 \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство Йенсена доказано. Более того, оно обращается в равенство только при $x = y$. Это означает, что целевая функция строго выпукла. Ее локальный минимум на заданном множестве ограничений будет также глобальным минимумом. \square

Проблема минимизации выпуклой квадратичной функции без ограничений хорошо исследована. Такие задачи решаются методом наименьших квадратов. Если для квадратичной задачи задаются ограничения, в общем случае простых аналитических решений не существует [160].

Решая задачу с помощью обобщения метода множителей Лагранжа на случай неотрицательных переменных, получим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_{n-l}, \lambda) = \sum_{i=1}^l \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n-l} r_{ji}^{\infty} x_j \right)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-l} x_i - 1 \right).$$

Необходимые условия локального экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_k} = -2 \sum_{i=1}^l r_{ki}'^{\infty} \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n-l} x_j r_{ji}'^{\infty} \right) + \lambda = 0, & k = 1, \dots, n-l; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n-l} x_i - 1 = 0; \\ x_k \geq 0. \end{cases}$$

Это система $n - l + 1$ линейных уравнений с $n - l + 1$ неизвестными.

Ограничение на неотрицательность переменных накладывает дополнительные условия на решение. Если неотрицательное решение системы существует, из выпуклости функции следует, что оно является точкой глобального минимума целевой функции.

В общем случае существуют разнообразные численные методы для решения задачи наименьших квадратов с ограничениями-равенствами и неравенствами. Алгоритмы решения задачи наименьших квадратов с линейными ограничениями приведены в [98].

7.1.2. Обратная задача управления. Достижение заданной величины ресурса в одном или нескольких стоках при минимальном суммарном ресурсе

Рассмотрим случай, когда управление происходит в одном из нескольких стоков. В этом случае задача всегда имеет точное решение. Для того чтобы некоторая стоковая вершина v_i ($i \leq l$) получила нужное количество ресурса при минимальном суммарном ресурсе, нужно выбрать переходную вершину v_j ($j > l$), такую, что из всех стоков она отдает в вершину v_i наибольшее количество ресурса, т.е. должно выполняться условие: $r_{ji}'^{\infty} = \max_{k \in \{l+1, \dots, n\}} r_{ki}'^{\infty}$.

Пусть q_i^* – количество ресурса, которое должен получить сток с номером i в предельном состоянии. Тогда общее количество ресурса, которое в начальном состоянии должно находиться в переходной вершине v_j , будет равно $\frac{q_i^*}{r_{ji}'^{\infty}}$. Поскольку весь ресурс в начальном состоянии должен быть сосредоточен в v_j , выполняется равенство:

$$W = \frac{q_i^*}{r_{ji}^{\infty}}.$$

Эта величина суммарного ресурса минимальна для заданного значения q_i^* .

Если в предельном состоянии ресурс должен находиться в двух и более стоках, эта задача уже может не иметь точного решения.

Опишем метод нахождения минимального значения суммарного ресурса W , при котором каждый сток в предельном состоянии будет иметь ресурс, не меньший, заданной величины.

Если $q_{i_1}^*, \dots, q_{i_k}^*$ – ресурсы, которые должны получить стоки с номерами i_1, \dots, i_k ($i_1, \dots, i_k \leq l$), то суммарный необходимый ресурс обозначим через W_{\min} : $W_{\min} = q_{i_1}^* + \dots + q_{i_k}^*$. Вектор предельного состояния Q^g

тогда можно записать как $Q^g = (\gamma_1 W_{\min}, \dots, \gamma_l W_{\min})$, где $\gamma_i = \frac{q_i^*}{W_{\min}}$. Если для

некоторого i выполняется $q_i^* = 0$, то соответствующая компонента Q^g также равна нулю.

Поиск начального состояния для получения наилучшего приближения вектора Q^g соответствует прямой задаче из раздела 7.1.1. Решив ее и найдя вектор начального состояния $Q_{pass}(0)$, для которого вектор предельного состояния Q_s^* , будет иметь минимальное расстояние от вектора Q^g , оценим разность:

$$\Delta Q = Q^g - Q_s^*.$$

Нас будут интересовать только те компоненты вектора ΔQ , которые соответствуют индексам i_1, \dots, i_k . Если среди них нет положительных величин, задача решена.

Если некоторые из компонент вектора ΔQ , соответствующие индексам i_1, \dots, i_k , положительны, выберем из них максимальное значение. Пусть $\Delta q_m = \max_i \Delta q_i > 0$. Тогда новое значение суммарного ресурса зададим как

$W = W_{\min} + k \Delta q_m$, где k – количество целевых вершин, для которых

компонента ΔQ положительна. Величина W гарантирует, что по крайней мере одна компонента нового вектора предельного состояния с номером $\arg \max_i \Delta q_i$ будет равна соответствующей компоненте целевого вектора $Q^g = (\gamma_1 W_{\min}, \dots, \gamma_n W_{\min})$, а остальные будут не меньше. По построению значение W минимально.

7.2. Управление в несимметричных сетях

Поведение регулярных несимметричных сетей с несколькими аттракторами сложнее поведения поглощающих сетей. Так, в поглощающей сети ресурс, помещенный в сток в начальном состоянии, остается в нем в любой момент времени. В регулярных сетях это условие не выполняется. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим примеры функционирования сети с двумя потенциальными аттракторами.

Пример 7.1. Несимметричная сеть ($n = 5$) с двумя аттракторами v_1 и v_2 задана матрицей:

$$(7.2) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основные ее характеристики следующие.

$\rho = ((10, 5), (10, 5), (5, 10), (5, 10), (5, 5))$; предельное состояние при $W = 1$: $Q^{1*} = (0,250, 0,250, 0,1(6), 0,1(6), 1(6))$; пороговое значение ресурса: $T = 20$; $\tilde{Q} = (5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$.

Рассмотрим начальное состояние $Q(0) = (0, 5, 20, 0, 0)$. Суммарный ресурс 25 больше порогового значения, значит, излишки ресурса должны распределиться между аттракторами. Аттрактор v_2 имеет ресурс в начальном состоянии, аттрактор v_1 – нет.

Предельное состояние для такого вектора $Q(0)$ будет $Q^* = (10, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$. Как видно, весь излишек оказался в первой вершине (поскольку она связана с источником, имеющим большой ресурс, ребром с большой пропускной способностью). Вершине v_2 не удалось накопить больше того, что она имела в начале.

Даже с ресурсом, превышающим выходную пропускную способность, потенциальный аттрактор бывает неспособным перейти в зону Z^{+*} . Для той же сети перераспределим ресурс 25 в начальном состоянии: $Q(0) = (0, 8, 17, 0, 0)$. Предельное состояние в этом случае будет точно таким же: $Q^* = (10, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$.

Более того, если ресурс 8 переложить в вершину v_4 (источник, связанный ребром с большой пропускной способностью с v_2), так, чтобы начальное состояние было $Q(0) = (0, 0, 17, 8, 0)$, то предельное состояние будет: $Q^* = (9,75, 5,25, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$. То есть, в этом случае второй аттрактор получает излишки сверх своей пропускной способности, чего не наблюдалось, когда мы помещали ресурс непосредственно в него.

Таким образом, потенциальный аттрактор может притягивать ресурс из источников, но не всегда может удержать ресурс, находящийся в нем в начальном состоянии. Будем рассматривать начальные состояния, в которых ресурс находится в источниках. Для таких начальных состояний поставим задачу управления. Не-аттракторы будем рассматривать как управляющие вершины, аттракторы – как целевые вершины.

7.2.1. Поглощающая сеть, соответствующая несимметричной, и поправка на регулярность δW

Для того чтобы определить управление в несимметричных сетях с неединственным аттрактором, исследуем распределение ресурса между потенциальными аттракторами при $W > T$. В главе 3 для больших ресурсов были определены все компоненты вектора предельного состояния, кроме вершин-аттракторов. Если аттрактор в сети один, предельное состояние единственно. Если потенциальных аттракторов несколько, ресурс между

ними в предельном состоянии может распределяться по-разному для разных начальных состояний. Опишем зависимость предельного состояния в аттракторах от начального состояния сети, как это было сделано для эйлеровых и поглощающих сетей.

Рассмотрим несимметричную сеть с двумя аттракторами, заданную матрицей (7.2). Для нее $Q^{1*}=(0,250, 0,250, 0,1(6), 0,1(6), 0,1(6))$, $T = 20$.

Пусть в начальном состоянии весь суммарный ресурс $W > T$ находится в одном из источников. Найдем закономерность распределения ресурса $W - T$ между аттракторами при изменении W . Рассмотрим два начальных состояния и соответствующие им предельные состояния:

$$(7.3) \quad Q(0)=(0, 0, 50, 0, 0) \rightarrow Q^* = (29,3, 10,7, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

$$(7.4) \quad Q(0)=(0, 0, 90, 0, 0) \rightarrow Q^* = (59,3, 20,7, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

Суммарный ресурс вершин, находящихся в зоне Z^* , в предельном состоянии равен 10. При $Q(0) = (0, 0, 50, 0, 0)$ и $Q(0)=(0, 0, 90, 0, 0)$ в зоне Z^{+*} распределяется ресурс, равный 40 и 80 соответственно. При суммарном приросте 40 прирост в вершинах составил, соответственно 30 и 10, т.е. $0,75\Delta W$ и $0,25\Delta W$. Прирост ресурса распределился в пропорции 3:1.

При любом дальнейшем увеличении ресурса пропорция 3:1 в распределении ресурса ΔW между аттракторами сохраняется. В силу симметричности аттракторов, прирост ресурса во втором источнике (вершине v_4) распределится в пропорции $0,25\Delta W$ и $0,75\Delta W$ (соответственно, 1:3). А прирост ресурса в нейтральной вершине распределится как $0,5\Delta W$, $0,5\Delta W$ (1:1).

Для объяснения этого факта построим поглощающую сеть, соответствующую данной несимметричной сети. Т.е. превратим аттракторы в стоки, заменив все элементы матрицы R , соответствующие входным пропускным способностям аттракторов, нулями. Матрицу пропускной способности такой сети обозначим через R_{absorb} .

$$R_{absorb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предел степеней стохастической матрицы (формула (7.1)) обозначим через R_{absorb}^{∞} . Найдем эту матрицу, воспользовавшись формулой из следствия 6.2 (глава 6). Для этого вычислим векторы предельного состояния при единичном ресурсе, поочередно находящемся в каждой из переходных вершин:

$$Q(0)=(0, 0, 1, 0, 0) \rightarrow Q^*=(0,75, 0,25, 0, 0, 0);$$

$$Q(0)=(0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow Q^*=(0,25, 0,75, 0, 0, 0);$$

$$Q(0)=(0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow Q^*=(0,5, 0,5, 0, 0, 0).$$

Тогда:

$$(7.5) \quad R_{absorb}^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что именно в таких пропорциях распределяется ресурс ΔW из каждой не-аттрактивной вершины между аттракторами.

Возникает вопрос, зависит ли эта пропорция от первых двух строк матрицы R , или выходные пропускные способности аттракторов могут быть любыми до тех пор, пока они остаются аттракторами. При изменении выходных пропускных способностей аттракторов меняется пороговое значение T . Остается ли при больших W пропорция, заданная R_{absorb}^{∞} , для излишков ресурса?

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 7.2. Сеть задана матрицей

$$(7.6) \quad R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой сети $T = 10$; $Q^{1*} = (0,250, 0,250, 0,1(6), 0,1(6), 1(6))$;

$$\tilde{Q} = (2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).$$

Функционирование сети при разных начальных состояниях дает следующие предельные состояния:

$$Q(0) = (0, 0, 85, 0, 0) \rightarrow Q^* = (60,5, 19,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6));$$

$$Q(0) = (0, 0, 45, 0, 0) \rightarrow Q^* = (30,5, 9,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6)).$$

Ресурс, равный 5, остается в зоне Z^* , остальной распределяется между аттракторами. Разность ресурса для этих двух начальных состояний $\Delta W = 40$ разделилась в пропорции 30:10, т.е. 3:1, как и раньше.

Это соотношение выполняется не только для однородных выходных пропускных способностей аттракторов. Но чтобы обе вершины оставались потенциальными аттракторами, их выходные пропускные способности нельзя изменять произвольно. Не приводят к потере аттрактивности любые изменения в пропускных способностях петель аттракторов, а также одинаковые изменения в пропускных способностях ребер, связывающих аттракторы с нейтральной вершиной v_5 и друг с другом.

Пример 7.3. Сеть задана матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нее имеем: $T = 23$; $Q^{1*} = (0,261, 0,478, 0,116, 0,116, 0,029)$;

$$\tilde{Q} = (6, 11, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

Как видно, вектор предельных вероятностей изменился; в той же пропорции изменились компоненты вектора \tilde{Q} . В зоне Z^* в предельном состоянии оказывается ресурс, равный 6.

Рассмотрим две пары векторов (начальное состояние \rightarrow предельное состояние): $Q(0) \rightarrow Q^*$.

$$Q(0)=(0, 0, 86, 0, 0) \rightarrow Q^*=(56,910, 23,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

$$Q(0)=(0, 0, 46, 0, 0) \rightarrow Q^*=(26,910, 13,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

Разность ресурса $\Delta W = 40$ вновь разделилась в пропорции 3:1, несмотря на вышеописанные изменения векторов предельного состояния.

Эта пропорция имеет место только для разности между двумя различными векторами. В пределах одного вектора предельного состояния она не выполняется. Рассмотрим пару векторов:

$$Q(0)=(0, 0, 86, 0, 0) \rightarrow Q^*=(56,910, 23,090, 2,(6), 2,(6), 0,(6)).$$

$$r_1^{out} = 6, r_2^{out} = 11.$$

$$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 50.910, \Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 12,090$$

$$\Delta q_1 : \Delta q_2 = 50,910 : 12,090 > 4.$$

Вернемся к матрице (7.2) и проверим выполнение этой пропорции для нее. Из примера 7.1 имеем:

$$Q(0)=(0, 0, 100, 0, 0) \rightarrow Q^*=(66,8, 23,2, 3,(3), 3,(3), 3,(3)).$$

$$\text{Для этой матрицы } r_1^{out} = 5, r_2^{out} = 5.$$

$$\Delta q_1 = q_1^* - r_1^{out} = 61.8, \Delta q_2 = q_2^* - r_2^{out} = 18,2.$$

Как видно, пропорция 3:1 вновь не выполняется.

Вычислим разность $\Delta q_1 - 3\Delta q_2$:

$$\Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 61,8 - 18,2 \cdot 3 = 61,8 - 54,6 = 7,2.$$

Проверим, чему равна эта разность при других значениях W .

Из (7.3), (7.4) следует, что при $W = 50$ и $W = 90$ также выполняется равенство:

$$(7.7) \quad \Delta q_1 - 3\Delta q_2 = 7,2.$$

Для достаточно больших значений W в сети, заданной матрицей (7.2), значение разности (7.7) остается неизменным. Обозначим его через δW . Начиная с некоторого $W_{min} \geq T$, $\delta W = \text{const}$.

Таким образом, для поглощающей сети $\delta W = 0$. Как только поглощающая сеть превращается в регулярную, (т.е. у стоков появляются выходные ребра), величина δW становится положительной.

Будем называть δW поправкой на регулярность.

Для того чтобы найти W_{min} и объяснить, откуда возникает вклад ресурса δW , нарушающий пропорцию, имеющую место для стоков, рассмотрим функционирование сети при ресурсах $W > T$, близких к пороговому значению, т.е. таких, что $W - T \leq \delta W$.

Пример 7.4. Сеть задана матрицей (7.2). Начиная с $W = T$, будем увеличивать суммарный ресурс в сети, помещая его в начальном состоянии в третью вершину. Для этой сети $T = 20$. Выпишем начальные и соответствующие им предельные состояния.

$$Q(0) = (0, 0, 20, 0, 0) \rightarrow \tilde{Q} = (5, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 25, 0, 0) \rightarrow Q^* = (10, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 0, 0) \rightarrow Q^* = (12, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 2, 0, 0) \rightarrow Q^* = (12, 2, 5, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

$$Q(0) = (0, 0, 27, 21, 0, 0) \rightarrow Q^* = (12, 20, 75, 5, 0, 0, 25, 3, (3), 3, (3), 3, (3)).$$

Из этих пар векторов видно, что при значениях $W - T \leq 7,2$ ресурс из источника не распределяется пропорционально, а накапливается в одном аттракторе. Ресурс второго аттрактора остается в предельном состоянии равным $r_2^{out} = 5$ вплоть до $W = 27,2$, и, соответственно, $\delta W = 7,2$.

При суммарном ресурсе $W > 27,2$ второй аттрактор тоже попадает в зону Z^{+*} , и начинает выполняться соотношение:

$$(q_1^* - 5 - 7,2) : (q_2^* - 5) = 1 : 3$$

В общем виде для сети с двумя симметричными аттракторами v_1 и v_1 , запитанными на источники v_3 и v_4 соответственно, можно утверждать

следующее. Если ресурс в начальном состоянии находится в вершине v_3 , и при этом его величина удовлетворяет неравенству $W \geq T + \delta W$, в предельном состоянии выполнится соотношение:

$$(q_1^* - r_1^{out} - \delta W) : (q_2^* - r_2^{out}) = r_{absorb31}'^{\infty} : r_{absorb32}'^{\infty},$$

где матрица $R_{absorb}'^{\infty}$ задана формулой (7.5).

То есть, если известно значение δW , предельное состояние при заданном начальном находится однозначно.

Лемма 7.1. Пусть в регулярной несимметричной сети с двумя аттракторами v_1 и v_2 , ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в источнике v_j , для которого $r_{absorb j1}'^{\infty} = \max_k r_{absorb k1}'^{\infty}$. Тогда вектор предельного состояния равен:

$$(7.8) \quad Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (W - T, 0, 0, \dots, 0), & \text{при } W \leq T + \delta W \\ \tilde{Q} + (\delta W + r_{absorb j1}'^{\infty} \cdot \Delta W, r_{absorb j2}'^{\infty} \cdot \Delta W, 0, \dots, 0), & \text{при } W > T + \delta W \end{cases}$$

где $\Delta W = W - (T + \delta W)$, $R_{absorb}'^{\infty}$ – предельная матрица поглощающей сети, соответствующей данной регулярной сети.

Доказательство. Дисбаланс в аттракторах происходит по следующей причине. Пока аттрактор v_2 добирает свой ресурс до выходной пропускной способности, он функционирует по правилу 2, т.е. на каждом такте отдает весь свой ресурс. Аттрактор v_1 переходит на функционирование по правилу 1 и начинает отдавать по полной выходной пропускной способности, получая больше этого значения. Излишек на каждом такте остается в v_1 . Таким образом, δW состоит из ресурса, накопленного одним аттрактором, пока он работает по правилу 1, в то время как другой аттрактор работает по правилу 2. Если значение ресурса суммарного ресурса $W \leq T + \delta W$, то по определению δW ресурс аттрактора v_2 асимптотически стремится к r_1^{out} , и v_2 не переходит в зону $Z^+(t)$, и верхняя строка (7.8) доказана.

Если $W > T + \delta W$, оба аттрактора оказываются в зоне $Z^+(t)$. В некоторый момент времени t' выполнится: $q_2(t' - 1) \leq r_2^{out}$ и $q_2(t') > r_2^{out}$. Тогда $q_1(t') = r_1^{out} + \delta W$. Покажем, что при переходе второго аттрактора в зону $Z^+(t)$ ресурс начинает распределяться между аттракторами в пропорции, заданной R'_{absorb} . Выходной поток в аттракторах при их переходе в зону $Z^+(t)$ стабилизировался: он равен r_1^{out} в первом аттракторе и r_2^{out} во втором – в каждое ребро они отдают по полной пропускной способности. Накопление в аттракторах происходит, пока их входной поток больше выходного. Оно складывается из разницы стабильной и нестабильной компонент, поскольку в сбалансированном (предельном) потоке для аттракторов выполняется: $f_1^{in*} = f_1^{out*} = r_1^{out}$, $f_2^{in*} = f_2^{out*} = r_2^{out}$. Если рассматривать только нестабильную компоненту потока, ей соответствует матрица, в которой выходные пропускные способности аттракторов равны нулю, а это и есть матрица R_{absorb} .

Таким образом, ресурс сверх $T + \delta W$ распределяется между аттракторами в пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb} . \square

Лемма легко обобщается на случай произвольного количества аттракторов. Пусть в сети с l аттракторами v_1, \dots, v_l , ресурс $W > T$ в начальном состоянии весь сосредоточен в источнике v_j , $j > l$. Обозначим через δW_i – поправки в каждом аттракторе при любом $W \geq T$ – достаточно большом, чтобы часть ресурса распределялась в предельном состоянии в соответствии с матрицей R'^{∞}_{absorb} . Ясно, что $\delta W_i = \text{const}$, поскольку после перехода последнего из аттракторов в зону $Z^+(t)$, выходной поток в них стабилизируется, и ресурс начинает прибывать в них с пропорции, заданной матрицей R'^{∞}_{absorb} .

Теорема 7.1. Пусть в регулярной несимметричной сети с l аттракторами v_1, \dots, v_l ресурс $W > T$ в начальном состоянии находится в источнике v_j , $j > l$. Тогда вектор предельного состояния равен:

(7.9)

$$Q^* = \begin{cases} \tilde{Q} + (0, \dots, W - T, 0, \dots, 0), & \text{при } W \leq T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) \\ \tilde{Q} + (\delta W_1^\wedge, \dots, \delta W_l^\wedge, 0, \dots, 0), & \text{при } T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W \leq T + \delta W \\ \tilde{Q} + (\delta W_1 + r_{absorb\ j1}^{\infty} \cdot \Delta W, \dots, \delta W_l + r_{absorb\ jl}^{\infty} \cdot \Delta W, 0, \dots, 0), & \text{при } W > T + \delta W \end{cases}$$

где вектор $(0, \dots, W - T, 0, \dots, 0)$ имеет ненулевую компоненту с номером

$m \leq l$, m находится из условия: $m = \arg \max_k r_{absorb\ km}^{\infty}$;

$0 \leq \delta W_i^\wedge < \delta W_i$ – поправки при $T + (\delta W_m - \delta W_{-m}) < W < T + \delta W$;

$\delta W_m = \max_k \delta W_k$ – поправка, соответствующая аттрактору v_m ;

$\delta W_{-m} = \max_{\delta W_k \in \{\delta W_1, \dots, \delta W_l\} \setminus \delta W_m} \delta W_k$ – вторая по величине поправка при ресурсе,

сфокусированном в источнике v_j ;

$$\delta W = \sum_{i=1}^l \delta W_i; \quad \Delta W = W - (T + \delta W);$$

причем существует аттрактор v_i , для которого $\delta W_i = 0$, $i \leq l$.

Доказательство.

Докажем каждую строку из формулы (7.9) отдельно.

1. Справедливость формулы для случая $W < T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$ вытекает из доказательства леммы 7.1. Аттрактор v_m первым переходит на правило 1 и начинает набирать излишки ресурса, составляющие поправку $\delta W_m^\wedge = (W - T)$. Если второй (по величине δW_i) аттрактор не может перейти на правило 1, все излишки ресурса в предельном состоянии окажутся в вершине v_m . Переход второго аттрактора на правило 1 происходит, когда аттрактор v_m имеет ресурс, равный $(\delta W_m - \delta W_{-m})$. Отсюда непосредственно вытекает условие выполнения равенства $Q^* = \tilde{Q} + (0, \dots, W - T, 0, \dots, 0)$.

2. При ресурсе, превосходящем значение T менее чем на суммарную поправку δW , при функционировании сети часть аттракторов может не перейти в зону $Z^+(t)$, соответствующие поправки $\delta W_i^\wedge = \delta W_i^\wedge(W)$ для них будут равны нулю, и компоненты предельного состояния будут равны

соответствующим компонентам вектора $\tilde{Q} = (r_1^{out}, \dots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}(0), \dots, \tilde{q}_n(0))$. По мере увеличения суммарного ресурса сверх величины $T + (\delta W_m - \delta W_{-m})$, аттракторы один за другим смогут перейти в зону $Z^+(t)$. Если ввести такую нумерацию аттракторов, что они будут упорядочены по убыванию величины δW_i , т.е. $\delta W_1 := \delta W_m$, $\delta W_2 := \delta W_{-m}$, и т.д., то можно вычислить значение ресурса W , при котором аттрактор с номером k будет иметь в предельном состоянии $\delta W_k^{\wedge}(W) > 0$. Для этого необходимо, чтобы все аттракторы с номерами, меньшими k , тоже имели положительные поправки. Разобьем множество значений суммарного ресурса $W > T$ на интервалы и рассмотрим зону $Z^+(t)$ для каждого из них.

1) $T < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2)$: только аттрактор v_1 функционирует по правилу 1. Введем обозначение: $T + (\delta W_1 - \delta W_2) = T_1$. Далее границы полуинтервалов будем обозначать через T_i .

2) $T_1 < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) = T + \delta W_1 + \delta W_2 - 2\delta W_3 = T_2$: аттракторы v_1 и v_2 функционируют по правилу 1.

3) $T_2 < W \leq T + (\delta W_1 - \delta W_2) + 2(\delta W_2 - \delta W_3) + 3(\delta W_3 - \delta W_4) = T + \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 - 3\delta W_4 = T_3$: аттракторы v_1, v_2 и v_3 функционируют по правилу 1.

...

$l-1$) $T_{l-2} < W \leq T + \delta W_1 + \dots + \delta W_{l-1} - (l-1)\delta W_l = T_{l-1}$: аттракторы v_1, v_2, \dots, v_{l-1} функционируют по правилу 1.

l) $T_{l-1} < W \leq T + \delta W_1 + \dots + \delta W_l$: аттракторы v_1, v_2, \dots, v_l функционируют по правилу 1, но в аттракторе v_l ресурс в предельном состоянии меньше, чем $r_l^{out} + \delta W_l$.

$l+1$) $W > T + \delta W_1 + \dots + \delta W_l = T + \delta W$ все аттракторы переходят в зону $Z^+(t)$, и поправки достигли максимальных значений.

В промежуточных состояниях поправки не превосходят максимальных значений; вершины с поправками, равными нулю, находятся непосредственно из интервала, в которые попадает значение суммарного ресурса.

3. Третья строка формулы (7.9) доказана в пункте $l + 1$). При $W > T + \delta W$ все аттракторы переходят в зону $Z^+(t)$, и выходной поток в них стабилизируется за конечное число тактов. Далее в сети начинается перераспределение ресурса в соответствии с матрицей R_{absorb}^{∞} . \square

З а м е ч а н и е. Проиллюстрируем графически формулы в пунктах 1) – $l + 1$).

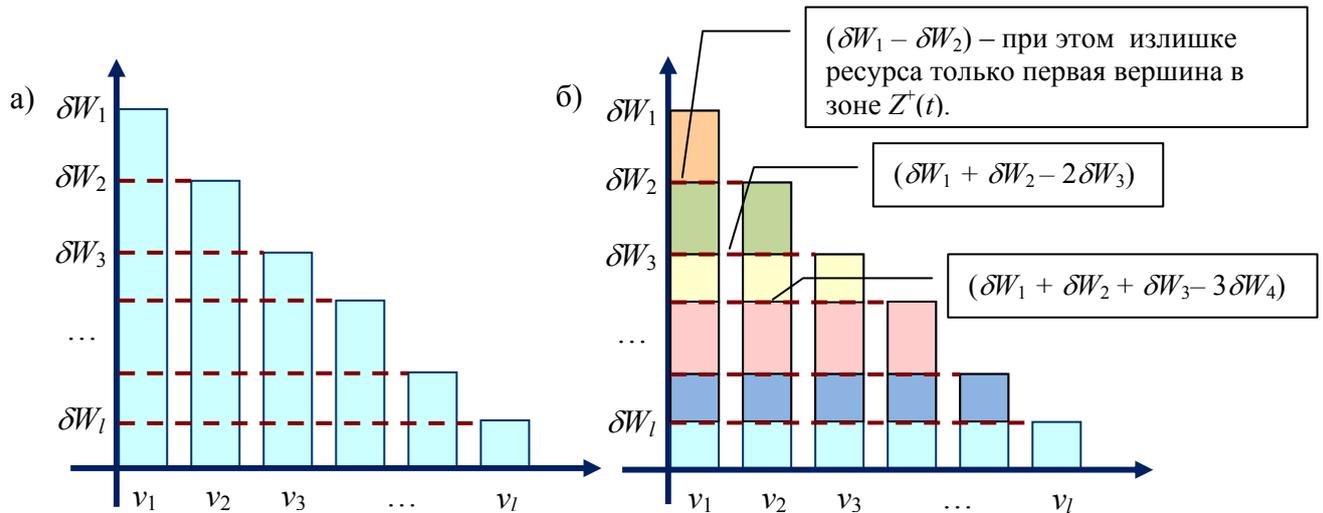


Рис. 7.1. а) расположение величин δW_i в порядке убывания; б) для перехода аттрактора в зону $Z^+(t)$, ресурс должен превысить сумму ресурсов над пунктирной чертой.

С л е д с т в и е. Непосредственно из доказательства теоремы вытекает, что если в несимметричной сети имеется l потенциальных аттракторов, а ресурс в начальном состоянии сосредоточен в вершине-источнике $v_j, j > l$, то значения суммарного ресурса при $W > T$ можно разбить на $l + 1$ интервал, для каждого из которых поправки δW_i будут иметь $i - 1$ вершин ($i = 1, \dots, l + 1$). Границы интервалов задаются формулами 1) – $l + 1$).

При ресурсе $W > T + \delta W_1 + \dots + \delta W_l = T + \delta W$ все вершины имеют максимально возможную поправку, ресурс сверх $T + \delta W$ распределяется в соответствии с матрицей R_{absorb}^{∞} .

Значения δW_i можно найти экспериментально для любой сети. Чтобы получить аналитические зависимости и выявить закономерности, рассмотрим

изменение δW_i при изменении строк матрицы пропускных способностей, соответствующих аттракторам. Если все элементы в них равны нулю, сеть превращается в поглощающую.

7.2.2. Зависимость δW от выходных пропускных способностей аттракторов

Вновь рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Здесь поправка δW накапливается только в одной вершине, поэтому можно записать $\delta W_1 = \delta W$ и далее оперировать величиной δW .

Проследим зависимость δW от выходных пропускных способностей вершин-аттракторов: $\delta W = \delta W(r_i^{out})$, $i = 1, 2$, считая, что первые две строки матрицы R однородны, как в матрицах (7.2) и (7.6).

Пример 7.5. В матрице

$$R = \begin{pmatrix} r & r & r & r & r \\ r & r & r & r & r \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

будем изменять пропускные способности r от нуля с некоторым шагом.

Данные экспериментов представлены в таблице 7.1

Таблица 7.1. Характеристики предельного состояния при разных выходных пропускных способностях аттракторов

№	r	$r_1^{out} = r_2^{out}$	T	\tilde{Q}	δW
1.	0	0	0		0
2.	0,05	0,25	1	(0,25, 0,25, 0,1(6), 0,1(6), 0,1(6))	0,875
3.	0,1	0,5	2	(0,5, 0,5, 0,(3), 0,(3), 0,(3))	1,75
4.	0,15	0,75	3	(0,75, 0,75, 0,5, 0,5, 0,5)	2,625
5.	0,2	1	4	(1, 1, 0,(6), 0,(6), 0,(6))	3,5
6.	0,25	1,25	5	(1,25, 1,25, 0,8(3), 0,8(3), 0,8(3))	4,375
7.	0,3	1,5	6	(1,5, 1,5, 1, 1, 1)	5
8.	0,35	1,75	7	(1,75, 1,75, 1,1(6), 1,1(6), 1,1(6))	5,375
9.	0,4	2	8	(2, 2, 1,(3), 1,(3), 1,(3))	5,75
10.	0,45	2,25	9	(2,25, 2,25, 1,5, 1,5, 1,5)	6,125
11.	0,5	2,5	10	(2,5, 2,5, 1,(6), 1,(6), 1,(6))	6,5
12.	0,55	2,75	11	(2,75, 2,75, 1,8(3), 1,8(3), 1,8(3))	6,875

13.	0,6	3	12	(3, 3, 2, 2, 2)	7,2
14.	0,65	3,25	13	(3,25, 3,25, 2,1(6), 2,1(6), 2,1(6))	7,28
15.	0,7	3,5	14	(3,5, 3,5, 2,(3), 2,(3), 2,(3))	7,3
16.	0,75	3,75	15	(3,75, 3,75, 2,5, 2,5, 2,5)	7,31
17.	0,8	4	16	(4, 4, 2,(6), 2,(6), 2,(6))	7,32
18.	0,85	4,25	17	(4,25, 4,25, 2,8(3), 2,8(3), 2,8(3))	7,335
19.	0,9	4,5	18	(4,5, 4,5, 3, 3, 3)	7,35
20.	0,95	4,75	19	(4,75, 4,75, 3,1(6), 3,1(6), 3,1(6))	7,365
21.	1	5	20	(5, 5, 3,(3), 3,(3), 3,(3))	7,2
22.	1,05	5,25	21	(5,25, 5,25, 3,5, 3,5, 3,5)	6,945
23.	1,1	5,5	22	(5,5, 5,5, 3,(6), 3,(6), 3,(6))	6,67
24.	1,15	5,75	23	(5,75, 5,75, 3,8(3), 3,8(3), 3,8(3))	6,4
25.	1,2	6	24	(6, 6, 4, 4, 4)	6,13
26.	1,25	6,25	25	(6,25, 6,25, 4,1(6), 4,1(6), 4,1(6))	6,155
27.	1,3	6,5	26	(6,5, 6,5, 4,(3), 4,(3), 4,(3))	6,16
28.	1,35	6,75	27	(6,75, 6,75, 4,5, 4,5, 4,5)	6,04
29.	1,4	7	28	(7, 7, 4,(6), 4,(6), 4,(6))	5,78
30.	1,45	7,25	29	(7,25, 7,25, 4,8(3), 4,8(3), 4,8(3))	5,515
31.	1,5	7,5	30	(7,5, 7,5, 5, 5, 5)	5,18

Таблица конечна. Далее пропускная способность увеличиваться не может, так как (как было показано в главе 3), матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

задает сеть стремя потенциальными аттракторами. Это вершины v_1 , v_2 и v_5 . В самом деле, для вершин v_1 , v_2 и v_5 выполняется:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{7,5}{0,25} = 30; \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{5}{1/6} = 30;$$

при этом из таблицы 7.1 видно, что для этой сети $T = 30$. Таким образом, по теореме 3.4 все эти вершины удовлетворяют условию аттрактивности.

Представим данные, полученные в таблице в виде графика (рис. 7.2). Из него видно, что изменения δW с ростом пропускных способностей аттракторов происходят немонотонно. Сначала эта величина возрастает, причем, присутствуют участки линейного роста; при пропускных способностях, равных приблизительно 0,95, достигает максимума, и затем

начинает убывать. Однако при пропускных способностях, равных 1,25 и 1,3, монотонность вновь нарушается.

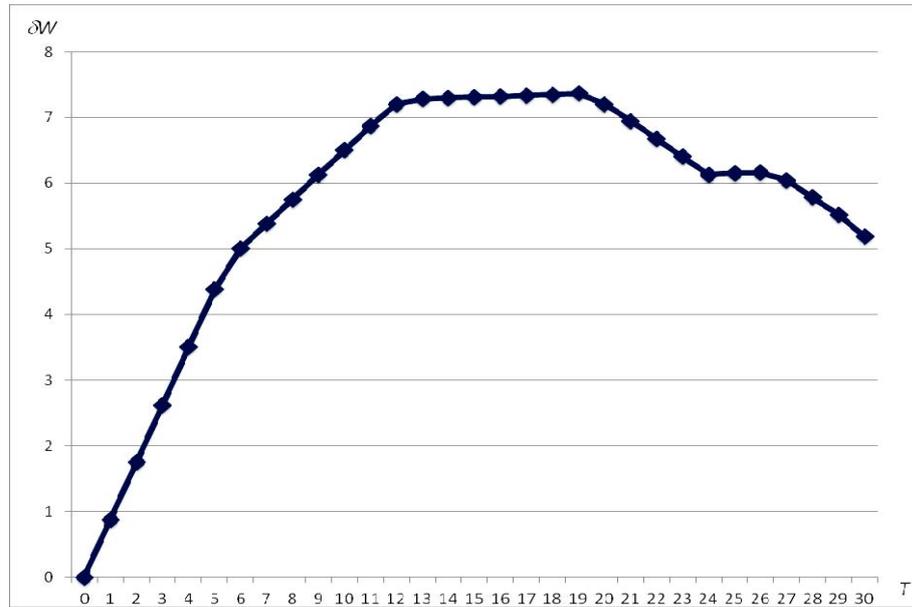


Рис. 7.2. Зависимость величины ΔW от выходных пропускных способностей аттракторов (и порогового значения T)

7.2.3. Нелинейные переходы при функционировании сети и неоднородная цепь Маркова

Функционирование несимметричной сети с ресурсом, большим порогового значения, описывается неоднородной цепью Маркова.

На каждом такте t можно построить новую матрицу пропускной способности $R(t)$, отличающуюся от матрицы R только диагональными элементами тех нестоковых вершин, которые функционируют по правилу 1. То есть,

$$r_{ii}(t) = \begin{cases} r_{ii}, & \text{если } q_i(t) \leq r_i^{out}, \\ q_i(t) - \sum_{j \neq i} r_{ij}, & \text{если } q_i(t) > r_i^{out} \end{cases}$$

Нормируя матрицы $R(t)$, получим стохастические матрицы $R'(t)$, которые задают неоднородную цепь Маркова. Вектор

$$Q(t+1) = Q(0) \prod_{t=0}^m R'(t)$$

совпадает с вектором состояния сети, заданной матрицей R , с начальным состоянием $Q(0)$.

Если в начальном состоянии весь ресурс сосредоточен в источнике с номером j , матрица $R(t)$ будет отличаться от исходной матрицы R только j -й строкой. В процессе функционирования некоторые вершины могут оказываться в зоне $Z^+(t)$, и тогда соответствующие им строки матрицы $R(t)$ будут отличаться от строк матрицы R . За конечное число шагов зона $Z^+(t)$ стабилизируется, и в ней остаются только потенциальные аттракторы. Все остальные строки матрицы $R(t)$ и соответствующей ей матрицы $R'(t)$ совпадают с соответствующими строками матриц R и R' .

Опишем процессы, происходящие в сети, когда одна из вершин изменяет правило функционирования. Снова для простоты рассмотрим сеть с двумя потенциальными аттракторами. Пусть $W > T + \delta W$, тогда при начальном состоянии, в котором весь ресурс сосредоточен в одном источнике, существует, как минимум, три точки смены правила функционирования: первый и второй аттракторы по очереди переходят на правило 1, источник с ресурсом переходит на правило 2.

Рассмотрим этапы, на которые делится функционирование сети.

0. В начальном состоянии в зоне $Z^+(0)$ находится единственная вершина – источник с ресурсом $W > T$.

1. Смена правила в первой вершине-аттракторе. Поскольку в начальном состоянии этот аттрактор не имел ресурса, существует как минимум один такт времени, в который эта вершина функционирует по правилу 2. Через конечное число тактов эта вершина переходит на правило 1. Зона $Z^+(t)$ содержит две вершины: аттрактор и источник.

2. Второй аттрактор переходит на правило 1. Зона $Z^+(t)$ содержит три вершины: два аттрактора и источник. Выходной поток из аттракторов стабилизируется.

3. Источник покидает зону $Z^+(t)$. В зоне $Z^+(t)$ остаются два аттрактора.

На промежутке между переходами 1 и 2 происходит формирование поправки δW . На промежутке между переходами 2 и 3 начинается формирование разности ресурса, соответствующее R'_{absorb} . Если переход 2 отсутствует, второй аттрактор не получает ресурс, больший своей выходной пропускной способности.

После перехода 3 зона $Z^+(t)$ стабилизируется.

Строки стохастических матриц $R'(t)$, соответствующие вершинам, функционирующим по правилу 1, изменяются на каждом такте. Рассмотрим матрицы, задающие изменение вектора исходящего потока. Они изменяются только при переходах 1-3, в остальные моменты времени они стационарны. Представим матрицу стохастическую матрицу R' в виде: $R' = (r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$, где r'_k – столбцы R' . Пусть v_j – вершина-источник содержащая ресурс в начальном состоянии, v_1, v_2 – аттракторы, причем, пусть, для определенности первый переходит в зону $Z^+(t)$ аттрактор v_1 . Тогда изменение исходящего потока на последовательных тактах в соответствии с этапами 0-3 можно записать следующим образом:

$$0. F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(r'_1, r'_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n), t < t_1;$$

$$1. F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, r'_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n), t_1 \leq t < t_2;$$

$$2. F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, e_2, r'_3, \dots, e_j, \dots, r'_n), t_2 \leq t < t_3;$$

$$3. F^{out}(t+1) = F^{out}(t)(e_1, e_2, r'_3, \dots, r'_j, \dots, r'_n), t \geq t_2.$$

Обозначим матрицы, на которые умножается вектор $F^{out}(t)$ через P_j, P_{1j}, P_{12j} и P_{12} соответственно. Для каждого из четырех этапов входящий поток вычисляется по формуле:

$$F^{in}(t+1) = F^{out}(t)R'.$$

Из сказанного выше следует, что δW вычисляется как первая компонента вектора:

$$\delta \vec{W} = \sum_{t=t_1}^{t_2} (F^{in}(t+1) - F^{out}(t+1)) = \sum_{t=t_1}^{t_2} (F^{out}(t)R' - F^{out}(t)P_{1j}) = \sum_{t=t_1}^{t_2} F^{out}(t)(R' - P_{1j});$$

Матрица $(R' - P_{1j})$ имеет два ненулевых столбца с номерами 1 и j .

Преобразуем это выражение далее, воспользовавшись зависимостью векторов исходящего потока на двух последовательных тактах. В рамках второго этапа

$$F^{out}(t+1) = F^{out}(t)P_{1j}, \text{ следовательно, } F^{out}(t) = F^{out}(t_1)(P_{1j})^{t-t_1}$$

Тогда:

$$\delta\vec{W} = F^{out}(t_1) \left(\sum_{t=t_1}^{t_2} (P_{1j})^{t-t_1} \right) (R' - P_{1j}).$$

Вектор $\delta\vec{W}$ имеет ненулевые компоненты с номерами 1 и j , соответствующие аттрактору и источнику. $\delta W = (\delta\vec{W})_1$.

Значения δW_i для сети с l аттракторами ($i = 1, \dots, l$) определяются аналогично. Количество промежуточных переходов будет $l + 1$ – по одному на каждый аттрактор и один для источника.

7.2.4. Предельное состояние сети при $f_{sum}(t) \geq T$

Заметим, что значения δW_i ($i = 1, \dots, l$) максимальны, когда ресурс в начальном состоянии сосредоточен только в одной вершине-источнике, т.е. асимметрия его распределения максимальна. При других начальных состояниях δW будут меньше. В предельном случае $\delta W = 0$. Так, например, эксперименты показывают, что если во все вершины в начальном состоянии поместить ресурс, больший предельного значения при $W = T$, то весь излишек будет распределяться в пропорции, заданной матрицей $R^{* \infty}_{absorb}$. Докажем, что это верно для любой несимметричной регулярной сети.

Т е о р е м а 7.2. Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть с l потенциальными аттракторами ($l > 1$) имеет суммарный ресурс $W > T$, и начальное ее состояние $Q(0)$ представимо в виде: $Q(0) = \tilde{Q} + \Delta Q(0)$, где \tilde{Q} – предельное состояние при $W = T$, $\Delta Q(0)$ – вектор распределения излишков ресурса $W - T$. Тогда предельное состояние представимо в виде суммы двух векторов:

$$(7.10) \quad Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q(0)R'_{absorb}{}^\infty.$$

Доказательство. Когда в регулярной сети все вершины имеют ресурс, не меньший соответствующей компоненты вектора \tilde{Q} , поток в сети состоит из двух частей: $F^{out}(t) = \tilde{F} + \Delta F^{out}(t)$, где стабильная компонента \tilde{F} равна предельному потоку при любом ресурсе $W > T$, а нестабильная компонента $\Delta F^{out}(t)$, уменьшающаяся со временем, отвечает за перераспределение излишков ресурса $\Delta Q(t)$. Причем, поскольку аттракторы при $W = T$ отдадут по полной пропускной способности и больше отдать уже не могут, то соответствующие им компоненты вектора $\Delta F^{out}(t)$ равны нулю – ресурс, соответствующий $\Delta Q(t)$, в аттракторы входит, но не может выйти. Таким образом, излишки распределяются по закону:

$$\Delta Q(t+1) = \Delta Q(t)R'_{absorb}, \text{ где } R'_{absorb} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_1 & R'_2 \end{array} \right).$$

В предельном состоянии:

$$(7.11) \quad \Delta Q^* = \Delta Q(0) \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_2)^{-1} R'_1 & O_2 \end{array} \right) = \Delta Q(0)R'_{absorb}{}^\infty. \quad \square$$

7.2.5. Начальные состояния, не создающие поправку

Теорема 7.2 содержит достаточное условие того, что ресурс в аттракторах распределится в той же пропорции, что и в стоках соответствующей поглощающей сети. Однако в ней описан узкий класс начальных состояний, приводящих к такому предельному состоянию. Предельное состояние описывается формулой (7.10) для еще одного класса начальных состояний.

Теорема 7.3. Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с l потенциальными аттракторами с номерами $1, \dots, l$ и k источниками с номерами $l+1, \dots, l+k$, начальное состояние задано вектором:

$$Q(0) = (q_1(0), \dots, q_l(0), \tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1} + \Delta Q_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k} + \Delta Q_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

где величины $\Delta W_j = \sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}$ ($j = l+1, \dots, l+k$) – необходимые минимальные излишки в каждом источнике, r_i^{in-} – суммарная входная пропускная способность вершин из $Z(0)$ по ребрам из вершин-источников, $d_i(0)$ – дефициты всех вершин из $Z(0)$: $i = 1, \dots, l, l+k+1, \dots, n$, $\Delta Q_j \geq 0$, $j = l+1, \dots, l+k$. Тогда предельное состояние представимо в виде:

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta Q \cdot R_{absorb}^{\infty},$$

где ΔQ – вектор длины n с ненулевыми компонентами ΔQ_j ($j = l+1, \dots, l+k$).

Доказательство. В теореме утверждается, что если все источники имеют ресурс, и его количество достаточно велико, то накопления поправки δW в аттракторах не происходит. Чтобы доказать это утверждение и оценить количество ресурса, которое должно находиться в каждом из источников, обратимся к описанию смены правил вершинами в сети, данному в разделе 7.2.3. Накопление величины поправки происходит, когда при функционировании сети случается асинхронный переход аттракторов из зоны $Z(t)$ в зону $Z^+(t)$: пока в аттракторах из $Z^+(t)$ происходит накопление, аттракторы, находящиеся в $Z(t)$, продолжают отдавать весь свой ресурс.

При достаточно больших ресурсах во всех источниках аттракторы переходят на правило 1 одновременно (это следует из свойства аттрактивности (глава 3)). Следовательно, накопления поправки ресурса не происходит и $\delta W = 0$.

Определим понятие «достаточно большого ресурса».

Для каждой вершины v_i , которая в состоянии $Q(0)$ имеет дефицит ресурса, обозначим через r_i^{in-} ее суммарную входную пропускную способность из вершин-источников. Дефицит вершины v_i обозначим, как и прежде, $d_i(0)$. Тогда, чтобы покрыть дефицит каждой вершины до величины, соответствующей компоненте \tilde{Q} , источник v_j должен отдать

$\sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}$ ресурса, где i пробегает множество индексов вершин, имеющих дефицит в начальном состоянии.

$$\text{Отсюда } \Delta W_j = \sum_{i \in \{1, \dots, l, l+k+1, \dots, n\}} \frac{d_i(0)}{r_i^{in-}} r_{ji}.$$

Соответствующая компонента вектора ΔQ вычисляется по формуле:

$$\Delta Q_j = q_j(0) - \tilde{q}_j - \Delta W_j. \quad \square$$

Проиллюстрирует теорему примером, в котором предельное состояние может быть получено из начального аналитически.

Пример 7.6. Сеть задана матрицей (7.2). Пусть ресурс $W > T$ присутствует в обоих источниках, причем, в каждом источнике его достаточно много: $Q(0) = (0, 0, 20, 40, 0)$. Тогда предельное состояние для этой сети вычисляется по теореме 7.3 и равно $Q^* = (20, 30, 3,(3), 3,(3), 3,(3))$.

Опишем алгоритм нахождения Q^* . Все его компоненты, кроме двух первых, совпадают с компонентами вектора \tilde{Q} . Для расчета первых двух компонент найдем дефициты вершин в начальном состоянии и пропорцию восполнения этих дефицитов из обоих источников, содержащих излишки ресурса. Каждый источник должен отдать ресурс в нейтральную вершину в

количестве $3\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ и в вершины-аттракторы по 5 единиц – чтобы они

получили r_1^{out} и r_2^{out} единиц ресурса. Итого каждый из двух источников должен отдать $\frac{20}{3}$ ресурса для насыщения сети и оставить себе $3,(3) = \frac{10}{3}$.

$$\Delta W_{3,4} = \frac{20}{3}, \quad \tilde{q}_{3,4} = \frac{10}{3}$$

Излишек вершины v_3 составит $\Delta Q_3 = 20 - \frac{20}{3} - \frac{10}{3} = 20 - 10 = 10$, в

вершине v_4 остается излишек $\Delta Q_4 = 40 - 10 = 30$. Эти излишки вершины

должны распределить между аттракторами в пропорциях, соответственно, 3:1 и 1:3 (рис. 7.3).

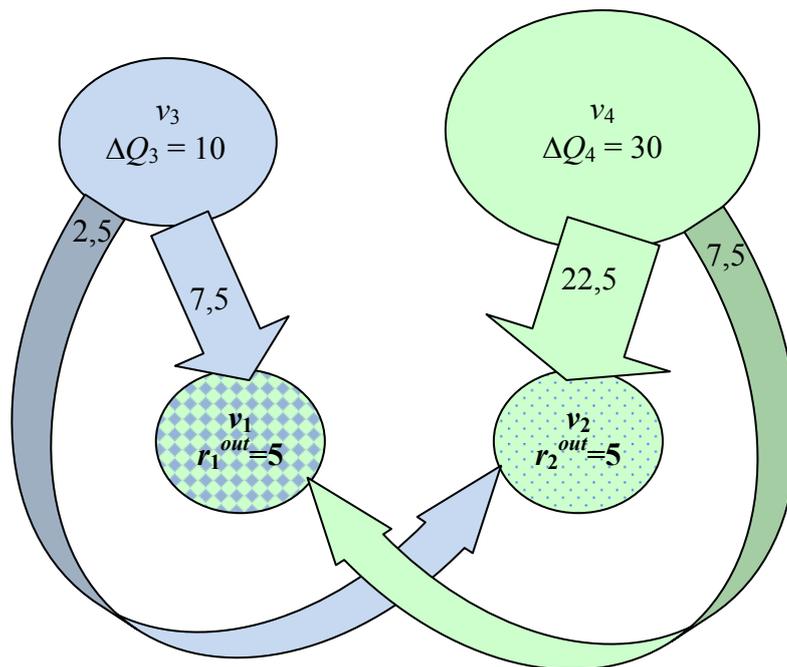


Рис. 7.3. Распределение излишков ресурса между аттракторами

Имеем: $q_1^* = 5 + 7.5 + 7.5 = 20$; $q_2^* = 5 + 2.5 + 22.5 = 30$.

Эти значения соответствуют первым двум компонентам вектора предельного состояния.

7.2.6. Оценка поправки δW

Теоремы 7.2-7.3 описывают начальные состояния, при которых для каждого из аттракторов $\delta W_i = 0$. Своего максимума величины δW_i достигают, если ресурс в начальном состоянии сосредоточен в одном источнике.

Т е о р е м а 7.4. Пусть в регулярной несимметричной ресурсной сети с l потенциальными аттракторами ($l \geq 2$), имеющими номера $1, \dots, l$, суммарный ресурс $W > T + \Delta W_j(0)$ ($\Delta W_j(0) \geq \delta W$) в начальном состоянии находится в вершине-источнике v_j . Тогда предельное состояние представимо в виде:

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta QR_{absorb}^{1\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0),$$

где $\Delta Q = Q(0) - \left(0, \dots, 0, \sum_{i=1}^l \delta W_i, 0, \dots, 0\right)$, ненулевая компонента имеет номер j .

Причем для аттрактора с номером $l_0 = \arg \min_k r_{absorb\ jk}^{*\infty}$ выполняется:

$\delta W_{l_0} = 0$, а остальные значения δW_i находятся по формуле:

$$(7.12) \quad \delta W_i = (q_i^* - r_i^{out}) - (q_{l_0}^* - r_{l_0}^{out}) \frac{r_{absorb\ ji}^{*\infty}}{r_{absorb\ jl_0}^{*\infty}}.$$

Доказательство. Теорема 7.4. двойственна теореме 7.1.

Вершина-аттрактор с номером $l_0 = \arg \min_j r_{absorb\ m_0j}^{*\infty}$ последней из аттракторов

перейдет на правило 1. Излишек δW_i в каждом аттракторе накапливается, пока хотя бы один аттрактор функционирует по правилу 2. Таким образом, вершина, перешедшая на правило 1 последней, не имеет излишка.

Формула (7.12) – следствие из теоремы 7.1. Когда все аттракторы функционируют по правилу 1, ресурс перераспределяется между ними в пропорции, задаваемой матрицей $R_{absorb}^{*\infty}$. Излишки в каждой вершине-аттракторе выражаются через компоненту вектора предельного состояния, соответствующую аттрактору, для которого $\delta W_{l_0} = 0$. \square

Теорема объясняет результаты, полученные в примерах 7.2-7.4. Пусть даны два вектора начальных состояний:

$$Q_1(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, \tilde{q}_{l+1} + \Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + \Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)),$$

$$Q_2(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots, \tilde{q}_{l+1} + 2\Delta W_{l+1}, \dots, \tilde{q}_{l+k} + 2\Delta W_{l+k}, \dots, q_n(0)), \text{ где}$$

ΔW_i – любые заведомо большие величины (например, можно считать, что $\Delta W_i > T$). Предельные состояния для них:

$$Q_1^* = \tilde{Q} + \Delta Q_1 R_{absorb}^{*\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0),$$

$$Q_2^* = \tilde{Q} + \Delta Q_2 R_{absorb}^{*\infty} + (\delta W_1, \delta W_2, \dots, \delta W_l, 0, \dots, 0),$$

Разность между ними равна:

$$Q_2^* - Q_1^* = \tilde{Q} + (\Delta Q_2 - \Delta Q_1) R_{absorb}^{*\infty}.$$

Таким образом, разность двух предельных состояний не зависит от поправок в аттракторах.

Компоненты вектора предельного состояния, соответствующие потенциальным аттракторам, можно вычислить через потоки.

Теорема 7.5. Пусть регулярная несимметричная ресурсная сеть имеет потенциальные аттракторы с номерами $1, \dots, l$. Пусть суммарный ресурс $W > T + \Delta W_j(0)$ в начальном состоянии находится в неаттрактивных вершинах. Тогда для каждого из потенциальных аттракторов выполнится соотношение:

$$(7.13) \quad \sum_{q_i(t) > r_i^{out}} (f_i^{in}(t) - r_i^{out}) = q_i^* - r_i^{out}$$

Доказательство. Левая часть равенства (7.13) характеризует ресурс, накопленный сверх суммарной выходной пропускной способности вершины на протяжении всего функционирования сети – каждое слагаемое равно разности входного и выходного потоков, а это и есть предельная разность $q_i^* - r_i^{out}$. \square

Следствие. Если в начальном состоянии $Q(0)$ ресурс сосредоточен в одной неаттрактивной вершине, и его величина $W > T$ такова, что в предельном состоянии по крайней мере один из потенциальный аттрактор имеет ресурс, равный своей суммарной выходной пропускной способности: $q_m^* = r_m^{out}$, $m \leq l$, а при любом его увеличении $q_m^* > r_m^{out}$, то для всех остальных аттракторов выполнится:

$$\sum_{q_i(t) > r_i^{out}} (f_i^{in}(t) - r_i^{out}) = \delta W_i.$$

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (7.13).

Отсюда вытекает, что

$$\delta W_i = q_i^* - r_i^{out} \quad \square.$$

Пример 7.7. Пусть сеть задана матрицей (7.2), и суммарный ресурс $W = T + \delta W_1 = 27.2$ в начальном состоянии находится в вершине v_3 :

$Q(0) = (0, 0, 27, 2, 0, 0)$. Предельное состояние для этой сети будет $Q^* = (7.2, 5, 3.(3), 3.(3), 3.(3))$.

$\delta W_1 = 7.2$ может быть найдена как сумма разностей двух графиков в дискретных точках:

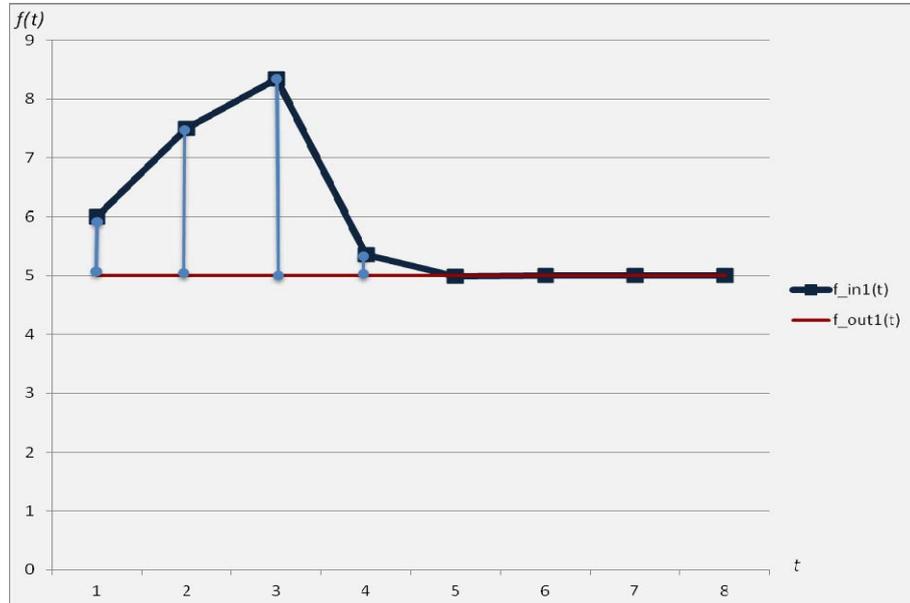


Рис. 7.4. Разность входящего и исходящего потоков

Из рисунка видно, что вклад в величину δW_i дают только первые несколько тактов функционирования сети.

7.2.7. Управление ресурсом в потенциальных аттракторах

Исследование несимметричных сетей с более чем одним аттрактором показывает, что ресурс в аттракторах в предельном состоянии вычислим точно только при некотором заданном множестве начальных состояний.

Для таких начальных состояний (описанных теоремами 7.2-7.3) предельное состояние находится по формуле:

$$Q^* = \tilde{Q} + \Delta QR_{absorb}^{\infty}.$$

В остальных случаях, при асинхронном переходе аттракторов в зону $Z^+(t)$, в тех аттракторах, которые переходят туда раньше, накапливается поправка на регулярность, не превосходящая величины δW_i . Величины δW_i легко вычисляются формуле (7.12).

Это означает, что по любому начальному состоянию можно вычислить некоторый диапазон, в который попадут значения компонент вектора предельного состояния, соответствующие потенциальным аттракторам.

Перечислим отличия несимметричных сетей от поглощающих, влияющие на постановку и решение задачи управления.

Таблица 7.2. Отличия несимметричных и поглощающих сетей

	Свойство	Поглощающая сеть	Несимметричная сеть
1.	Наличие порогового значения T	Нет. Предельное состояние всегда зависит от начального	Есть. При $W \leq T$ предельное состояние единственно. При $W > T$ ресурс, равный T , распределяется вне зависимости от начального состояния.
2.	Линейность	Предельное состояние зависит от начального линейно.	Предельное состояние зависит от начального нелинейно. Линейное изменение наблюдается только у разности между двумя предельными состояниями при больших ресурсах.
3.	Наличие поправки	Нет	Поправки в несимметричной сети зависят от начального состояния и суммарного ресурса. При ресурсе, большем некоторого известного значения, поправка в аттракторах стабилизируется. Для некоторых начальных состояний поправка максимальна. Выделен класс начальных состояний, для которых поправка равна нулю.

Ставя задачу управления при $W > T$, нужно учитывать эти особенности несимметричных сетей. Из них следует ряд ограничений.

1. В несимметричных сетях с несколькими потенциальными аттракторами нельзя управлять всем суммарным ресурсом. Ресурс, равный пороговому значению T , распределится независимо от начального состояния.
2. Ресурс сверх T также не всегда доступен для управления целиком. Распределение всего ресурса $W - T$ между аттракторами в той же пропорции, что и между стоками соответствующей поглощающей сети происходит из начальных состояний, заданных в теоремах 7.2-7.3.

3. При произвольном начальном состоянии закон распределения (7.10) выполняется с поправками в некоторых (как максимум, в $l-1$) аттракторах.
4. Начиная с некоторого количества ресурса, описанного в теореме 7.1, значения поправок δW_i перестают увеличиваться, и чем больше суммарный ресурс в сети, тем меньше относительная поправка в предельном состоянии.

Таким образом, управление ресурсом в несимметричных сетях сводится к управлению излишком $W - T$, с учетом указанных ограничений на возникновение поправок.

Выводы

1. Сформулированы прямая и обратная задачи управления в поглощающих сетях. В общем случае обе задачи решаются как задачи квадратичной оптимизации. Доказана выпуклость целевой функции. Если управление ресурсом происходит только в одном из нескольких стоков, задачи имеют точное решение.

2. Рассмотрены несимметричные регулярные сети с более чем одним аттрактором. Доказано, что распределение ресурса сверх порогового значения: $\Delta W = W - T$ происходит в соответствии с тем же законом, что и в соответствующей поглощающей сети (полученной из несимметричной удалением выходных ребер аттракторов), однако существует поправка, зависящая от пропускных способностей выходных ребер аттракторов и начального распределения ресурса.

3. Поправки оценены сверху; найдены начальные состояния, при которых они максимальны.

4. Найдены начальные состояния, при которых поправки отсутствуют.

5. Определены ограничения, при которых задачи управления в несимметричной сети сводятся к задачам управления в поглощающей сети с соответствующей матрицей пропускных способностей.

ГЛАВА 8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

8.1. Модель распространения вещества в водной среде, основанная на ресурсной сети

8.1.1. Анализ существующих подходов и описание модели

Проблема моделирования распространения веществ в водной среде возникает во многих задачах прогнозирования состояния водных систем. Ее решение требует построения модели динамики вод, которая использует данные о режимах течений, ветровой активности, стоках рек, и ряд других параметров. Эти параметры определяют перетоки между смежными районами водоема.

Модели [14] для определения объемов перетоков и поля скоростей установившихся течений используют методику расчёта стационарных течений для мелкого моря [128] с учетом ветровой активности [19]. Например, имитационная модель «динамика вод», разработанная для Азовского и Черного морей [27], моделирует годичный цикл и рассчитывает показатели, осредненные по пятидневкам. Эта модель используется при прогнозе запаса промысловых рыб в Азовском море [29]. Особенности таких моделей заключаются в том, что они оперируют данными в больших временных интервалах и рассчитаны на долгосрочные прогнозы.

Однако существует ряд актуальных задач, не решаемых в рамках указанных моделей. К ним относится, в частности, задача оперативного прогнозирования распространения загрязняющего вещества при его выбросе в акваторию. При аварийном выбросе загрязняющего вещества необходим прогноз его распространения в режиме реального времени с целью максимально возможного предотвращения нежелательных последствий и предупреждения его распространения на большой территории.

Для решения задачи имитации распространения химических веществ и пассивных биологических объектов в режиме реального времени предлагается подход, использующий неоднородные ресурсные сети. На

основе этого аппарата разработана модель распространения веществ и осуществлена ее программная реализация, которая позволяет получить карту распределения вещества через любой заданный промежуток времени, а также проследить распространение вещества в динамике – как численно, так и визуальными средствами.

Входными данными модели являются значения перетоков между участками заданной акватории. Перетоки зависят от течений, ветровой активности и ряда других характеристик. В водоемах с устоявшимися течениями может быть построен ряд шаблонов, каждый из которых соответствует некоторой карте перетоков. Модель работает по готовым данным, хранящимся в базе данных. С помощью интерфейса модели можно обработать любые данные с заданной структурой, независимо от способа их получения, будь то натурные наблюдения или результаты математического моделирования.

Следует отметить, что предложенная модель не альтернатива гидродинамическим моделям – она является надстройкой над ними. Пропускные способности ресурсной сети, соответствующие полям течений, должны быть известны заранее. Однако модель позволяет производить настройки, связанные с ускорением-замедлением процесса распространения вещества, со степенью инерционности процесса и скоростью оседания, а также на основе разных шаблонов (например, при разной прогнозируемой ветровой активности) проигрывать возможные сценарии распространения; позволяет получить и проанализировать любое промежуточное состояние на заданный момент времени, а также проследить динамику процесса в целом.

Модель работает с переменным масштабом. В зависимости от заданного диапазона распространение вещества может быть рассчитано как на малом, так и на большом участке акватории. Таким образом, могут быть достигнуты большая точность вычислений и высокая степень детализации процесса с одной стороны и представлена целостная картина распространения с другой.

8.1.2. Топология и правила функционирования ресурсной сети

В основе модели лежит ресурсная сеть специального вида, представляющая собой регулярную двумерную решетку: каждая внутренняя вершина имеет девять инцидентных ей взвешенных ребер: четыре двусторонние связи с ближайшими соседями и петлю (рис.8.1).

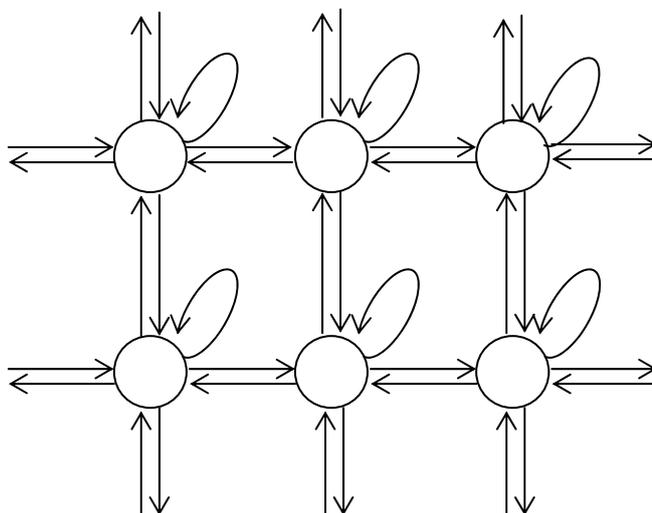


Рис. 8.1. Структура ресурсной сети

Сеть покрывает прямоугольную область, которая может иметь как открытые границы, так и замкнутые – непроницаемые. Если одна из четырех границ непроницаема, вершины, ей принадлежащие, не будут иметь соответствующих ребер (рис. 8.2). Если же граница открыта, граничные вершины будут иметь все инцидентные ребра (рис. 8.1).

Если хотя бы одна из границ проницаема, закон сохранения, справедливый для ресурсной сети, перестает выполняться: часть ресурса покидает моделируемый участок, и концентрация вещества на нем, соответственно, снижается.

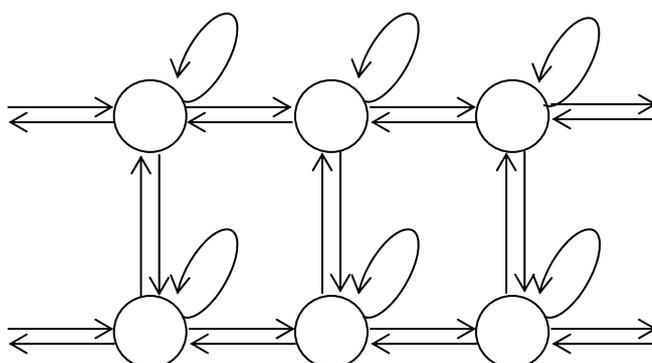


Рис. 8.2. Непроницаемые границы слева и справа

С помощью задания непроницаемых границ можно моделировать динамику речных течений, – в этом случае границы образуют берега.

Весы ребер сети соответствуют пропускным способностям и обозначают максимальное количество вещества, которое может быть перенесено в единицу времени.

Ресурс в вершинах равен количеству вещества, распределенному на площади, равной квадрату сетки (рис. 8.3).

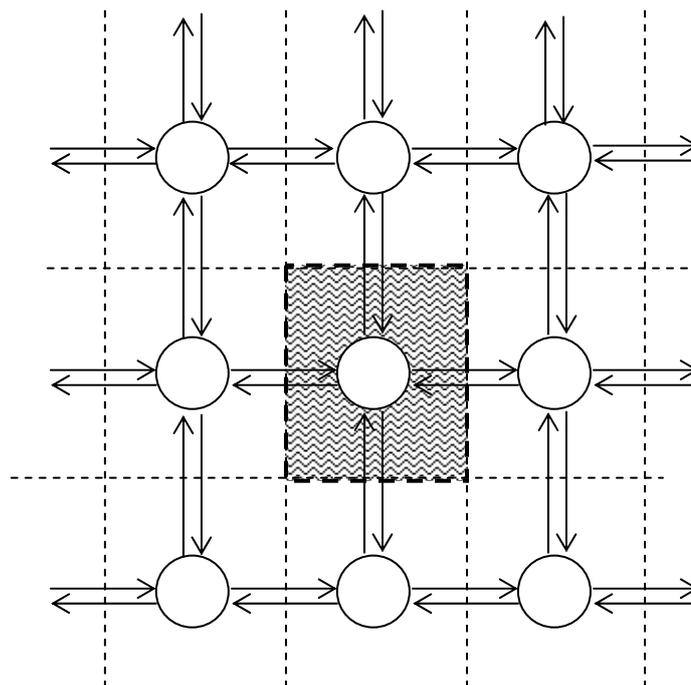


Рис. 8.3. Площадь, соответствующая одной вершине

На каждом такте дискретного времени t ресурс, имеющийся в вершине, передается в ребра по правилам 1-2.

Петля характеризует степень инерционности процесса: чем выше ее пропускная способность, тем больше ресурса останется в вершине, и тем меньше его будет отдано. С помощью увеличения пропускной способности петли можно моделировать процесс оседания вещества. Если вещество оседает быстро, в модели можно изменить правило 2 следующим образом:

Правило 2'. Если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ и $q_i(t) \geq r_{ii}$, в момент $t + 1$ вершина v_i в петлю (v_i, v_i) отдаст r_{ii} ресурса, а в каждое из выходящих ребре часть оставшегося ресурса, равную $\frac{r_{ik}}{r_i^{out} - r_{ii}} (q_i(t) - r_{ii})$.

Если же вершина имеет ресурс, меньший пропускной способности петли: $q_i(t) < r_{ii}$, он весь уходит в петлю.

Таким образом, петля получает приоритет: сначала ресурс идет в нее, и затем, по остаточному принципу уже в другие ребра.

Из сказанного следует, что манипулирование пропускной способностью петли и выбор правила функционирования позволяют управлять степенью инерционности системы, что делает ее более гибкой.

Для имитации распространения вещества выбирается прямоугольная область любой площади. На эту площадь накладывается прямоугольная сетка, причем количество вершин по вертикали и горизонтали может быть задано произвольно.

Если выброс произошел в районе берега, при неровной береговой линии можно задать координаты, частично захватывающие берег. Пропускные способности ребер, инцидентных вершинам, оказавшимся на суше, полагаются равными нулю. Увеличивая частоту сетки, можно задать контуры береговой линии с большой точностью.

8.1.3. Расчет перетоков между районами

Входными данными модели являются частота сетки, координаты границ рассматриваемой прямоугольной области и данные о перетоках между районами, хранящиеся в базах данных. Поле течений хранится в виде пропускных способностей исходящих ребер в каждом узле сетки для каждого из четырех направлений и петли.

Если соответствующей таблицы данных не существует, она может быть создана средствами самой модели. Для генерирования полей течений требуются дополнительные входные параметры. Это направление и сила ветра, направление и скорость течения. Сгенерированные данные не являются точными значениями векторов течения в каждой точке, однако на их основе можно проследить тенденции распространения вещества. Следует учитывать, что для разных водоемов и разных веществ зависимость

пропускных способностей сети от течений и ветра может изменяться, и поэтому расчет полей течений в каждом новом случае представляет собой нетривиальную задачу, которую нужно решать отдельно. Величины перетоков между смежными областями преобразуются в пропускные способности ребер.

В модели по умолчанию реализован алгоритм пересчета, результатом которого является пропорциональное увеличение пропускных способностей в направлении течения и ветра и уменьшение их в противоположном направлении, причем, влияние течения превосходит влияние ветра. При создании нового поля течений все пропускные способности полагаются равными единице. Затем, при заданных скоростях ветра и течения они преобразуются. Если ветер имеет одно из направлений: С, В, Ю, З, – пропускные способности каждого ребра, ориентированного в этом направлении, увеличиваются по формуле:

$$(8.1) \quad r_{ij_new} = r_{ij} \ln(v_{wind} + e),$$

где v_{wind} – скорость ветра.

Пропускные способности ребер, ориентированных в противоположном направлении, соответственно уменьшаются в той же пропорции:

$$(8.2) \quad r_{ij_new} = \frac{r_{ij}}{\ln(v_{wind} + e)}.$$

Течение влияет на изменение пропускных способностей сильнее, чем ветер. Формулы изменения пропускных способностей при течениях направлений С, В, Ю, З:

$$(8.3) \quad r_{ij_new} = r_{ij}(v_{flow} + 1) \text{ – в направлении течения;}$$

$$(8.4) \quad r_{ij_new} = \frac{r_{ij}}{v_{flow} + 1} \text{ – в направлении, противоположном}$$

течению.

Если же течение и ветер имеют половинные направления: СВ, ЮВ, ЮЗ, СЗ, то увеличиваются и уменьшаются пропускные способности сразу в

двух направлениях. Формулы (8.1)-(8.4) преобразуются в соответствии с теоремой Пифагора: проекции диагонали каждого квадрата на его стороны получаются делением правых частей формул (8.1)-(8.4) на $\sqrt{2}$.

8.1.4. Начальное распределение ресурса по узлам сетки

При заданном поле течений модель имитирует распространение вещества от некоторого начального состояния в течение определенного периода времени. Начальным состоянием могут служить данные о выбросе загрязнения или инвазии пассивного биологического объекта. Данные о локализации вещества в начальный момент времени являются входными данными модели, и в ресурсной сети рассматриваются как начальное распределение ресурса в узлах.

Если координаты выброса совпадают с координатами одного из узлов сетки, соответствующая вершина получает количество ресурса, равное мощности выброса.

Если координаты выброса оказываются внутри квадрата сетки, количество вещества помещается в четыре ближайших вершины. Ресурс делится пропорционально квадрату расстояния от точки выброса до каждой из вершин сетки.

Рассчитываются четыре величины:

$$(8.5) \quad d_i = (x_k - x)^2 + (y_m - y)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad k, m = 1, 2,$$

где x, y – координаты выброса, пары x_k, y_m – координаты ближайших узлов сетки.

Вводится величина:

$$C = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}.$$

Количество вещества в вершине рассчитывается по формуле:

$$q_i = \frac{W}{Cd_i}, \quad \text{где } W \text{ – величина выброса.}$$

Тогда суммарный ресурс в четырех вершинах составит:

$$\frac{W}{Cd_1} + \frac{W}{Cd_2} + \frac{W}{Cd_3} + \frac{W}{Cd_4} = \frac{W}{C} \cdot \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} \right) = \frac{W}{C} \cdot C = W$$

8.1.5. Управляющие параметры модели

В ресурсной сети процесс перераспределения происходит без учета физических свойств ресурса. При моделировании распространения вещества, кроме параметров окружающей среды, важны также и параметры самого вещества: его плотность, растворимость в воде, химическая активность, скорость оседания. Чтобы модель адекватно отражала характер и скорость распространения веществ, необходимо иметь возможность настраивать ее в зависимости от свойств вещества, погодных условий, ветровой активности, течений, вертикального перемешивания воды. Отметим также, что поскольку модель масштабируема и может охватывать как малые, так и большие площади, такты внутреннего времени модели будут соответствовать различным интервалам реального времени, и распространение вещества будет моделироваться с разной точностью.

Управление в модели осуществляется несколькими различными способами.

1. Для однородного ускорения или замедления процесса распространения вещества используется коэффициент пропорциональности пропускных способностей. С его помощью перераспределение можно ускорить или замедлить в нужное число раз. При его задании все пропускные способности в базе данных умножаются на этот коэффициент.

2. Для изменения инерционности системы отдельно увеличивается или уменьшается пропускная способность петель. Чем пропускная способность петли больше, тем больше ресурса остается в вершине. В терминах модели это означает, что большая часть вещества не покидает заданную площадь, и перераспределение происходит небольшими порциями.

3. Если вещество оседает с высокой скоростью, необходим переход работы сети с правила 2 на правило 2', когда вершина удерживает ресурс, равный пропускной способности петли, и, таким образом, количество

вещества, соответствующее этой пропускной способности, остается на заданной площади.

Изменяя эти параметры, а также варьируя перетоки из вершины в вершину для группы веществ и наиболее часто рассматриваемых участков водоема, можно создать файлы-шаблоны с перетоками в зависимости не только от свойств вещества, но и от физических параметров среды, погодных условий, сезона, стока рек и других величин.

Эти файлы позволят проигрывать множественные сценарии и исследовать динамику распространения веществ в различных условиях и при влиянии ряда различных внешних факторов.

8.1.6. Программная реализация модели

Входные данные и их структура

Входные данные модели хранятся в таблицах, базы данных. Файл с данными содержит координаты узлов сетки. Каждому узлу кроме координат соответствуют следующие поля: площадь района, за который отвечает этот узел, направление и скорость ветра, направление и скорость течения; пять полей, хранящих выходные пропускные способности: север, юг, запад, восток и петля, – и поле, содержащее количество ресурса. При задании непроницаемой границы пропускные способности ребер, ведущих за эту границу, обнуляются. Если нужных данных о перетоках не существует, новая таблица будет создана автоматически при задании новой сетки.

Количество вещества можно заносить как с помощью программного интерфейса, так и непосредственно в базу данных.

Следует отметить особенность хранения данных, которую нужно учитывать при моделировании реальных процессов. Каждой вершине поставлены в соответствие пропускные способности исходящих ребер. При открытой границе граничные вершины будут отдавать ресурс в четыре ребра (не считая петлю), а получать только из трех, потому что четвертая связь – связь с фиктивной вершиной вне исследуемой области. В эту фиктивную

вершину ресурс из граничной вершины виртуально приходит, но из нее по противоположно ориентированному ребру обратно не поступает. Поэтому для сохранения количества перенесенного вещества на границе необходимо уменьшать пропускные способности ребер, ведущих за границы сети. В настоящий момент эта функция возложена на эксперта. При автоматической генерации файла с данными все пропускные способности однонаправленных ребер задаются равными одной и той же величине, рассчитанной по одной из формул (8.1)-(8.4).

Алгоритм и интерфейс

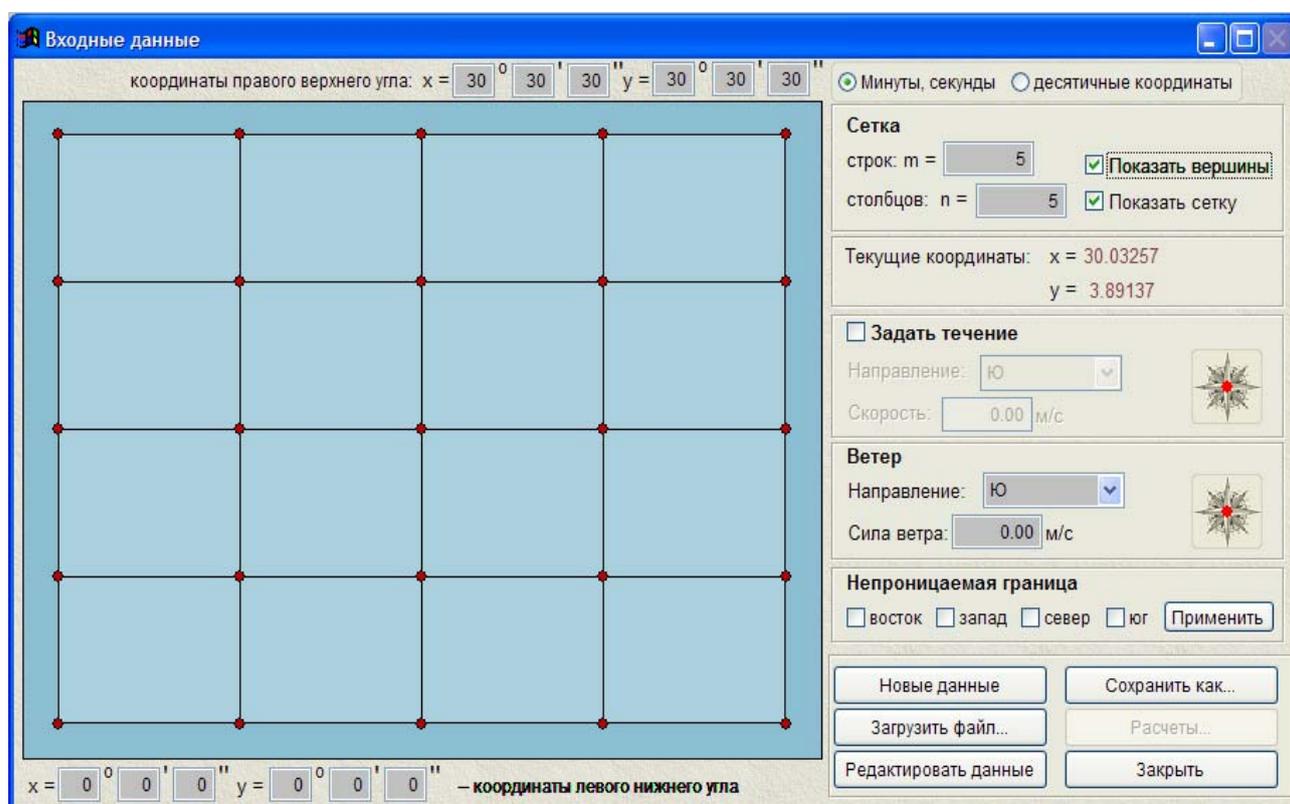


Рис. 8.4. Экранная форма работы с данными (вид по умолчанию)

По умолчанию программа работает с сеткой 5×5 (рис. 8.4). Координаты углов прямоугольника задаются в интерактивном режиме и указывают границы сетки.

Данные о выбросе заносятся с помощью экранной формы, представленной на рис. 8.5.

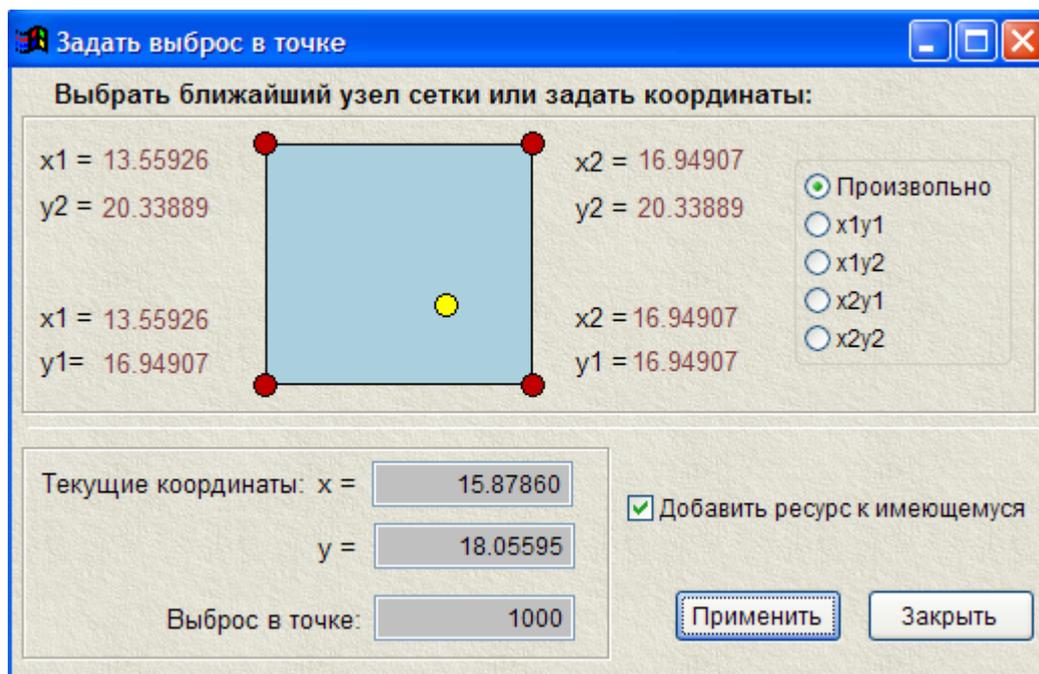


Рис. 8.5. Окно ввода данных

Форма вызывается двойным щелчком левой кнопки мыши по тому месту внутри моделируемой области (рис. 8.4), в котором произведен выброс. Точность положения курсора при этом неважна: достаточно, чтобы он находился в нужном квадрате сетки. Координаты выброса можно задать в полях ввода формы – для этого их нужно занести вручную в поля « $x =$ » и « $y =$ ». Желтый круг (рис. 8.5), обозначающий выброс, переместится в указанный участок заданного квадрата сетки.

Графический интерфейс этой формы интерактивен. Желтый круг можно перемещать внутри квадрата мышью, тогда координаты будут изменяться автоматически в зависимости от его положения. Если же выброс пришелся точно на узел сетки, в радиокнопке в правой части экрана можно выбрать одну из четырех вершин квадрата (рис. 8.6). В этом случае поля ввода координат выброса блокируются.

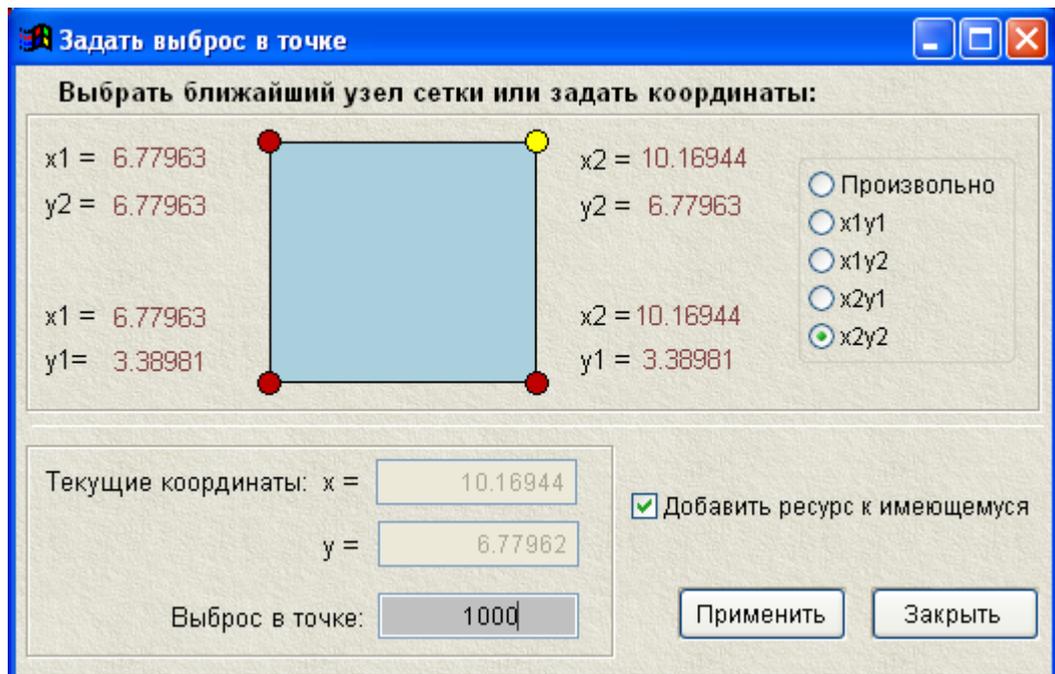


Рис. 8.6. Задание выброса в узле сетки

При нажатии на кнопку «Применить», данные о выбросе помещаются в базу данных. Если выброс произошел в узле сетки, весь его объем попадает в запись, соответствующую этому узлу, если он оказался внутри квадрата, количество вещества распределяется между четырьмя ближайшими узлами по формуле (8.5).

После этого, не покидая форму, можно посмотреть, сколько вещества находится в каждом узле. Для выброса, представленного на рис. 8.5, например, выбор в радиокнопке узла с координатами (x_2, y_2) приведет к результату, представленному на рис. 8.7.

Данные можно вносить в двух режимах: заменять имеющиеся на новые или добавлять к тем, что уже есть в таблице. Второй режим необходим, когда произошло более одного выброса в разных квадратах. Тогда количество вещества в смежных узлах сетки из двух соседних квадратов суммируется.

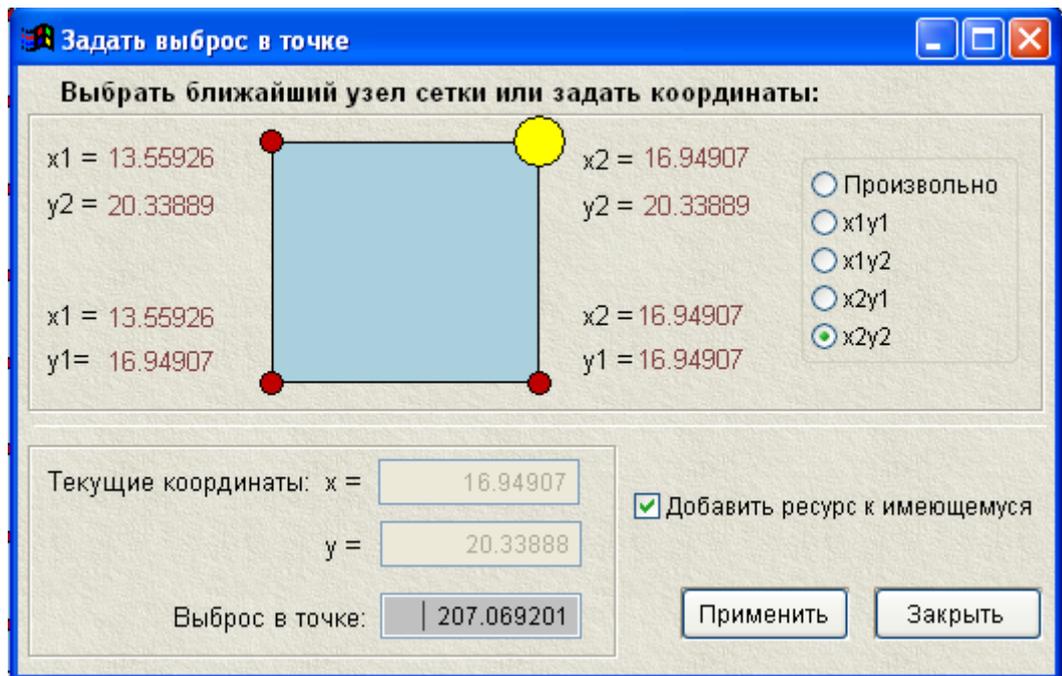


Рис. 8.7. Отображение выброса в узле сетки

После того, как данные введены, они отображаются в главном окне программы (рис. 8.8).

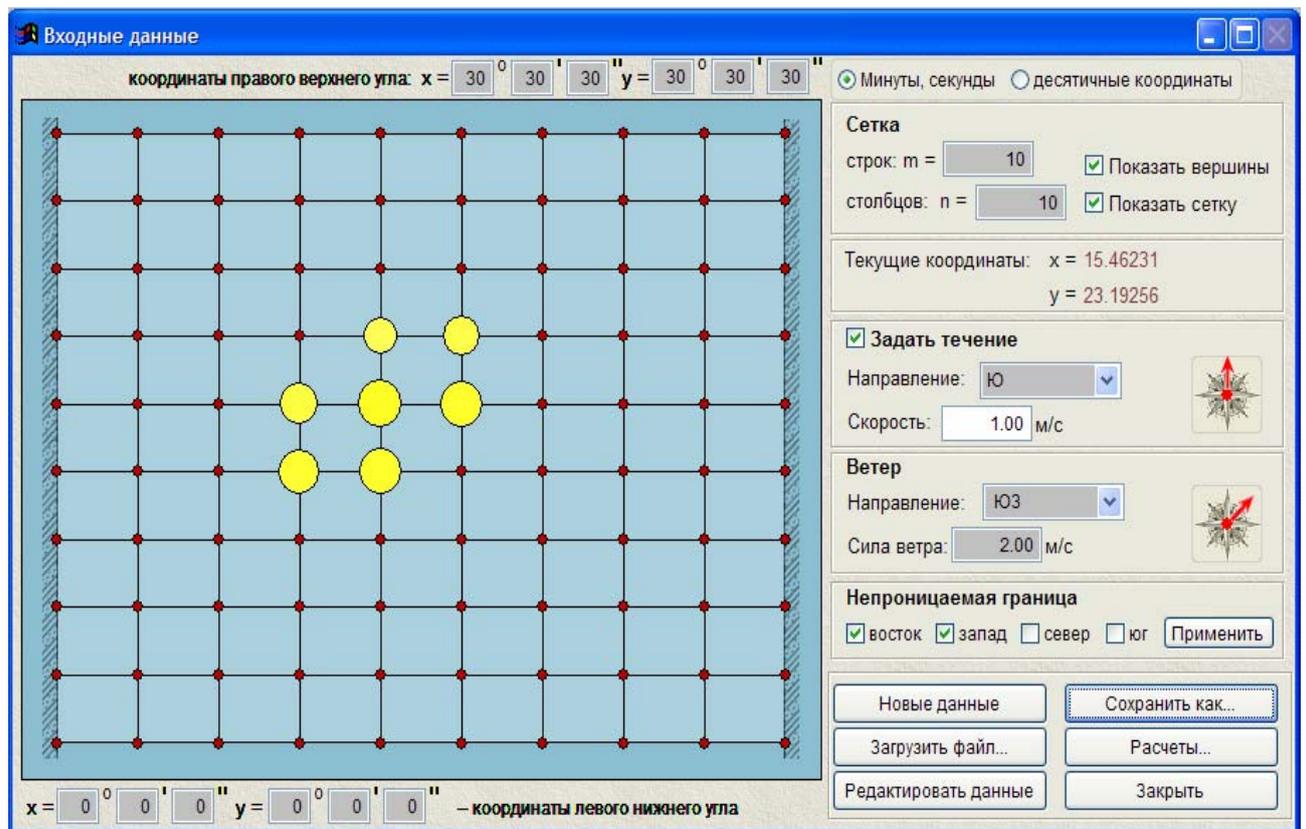


Рис. 8.8. Отображение введенных данных (сетка 10×10)

Перед тем, как моделировать распространение вещества, программа предоставляет возможность изменить настройки по умолчанию. При нажатии

на кнопку «Расчеты...» появляется окно для корректировки ряда параметров (рис. 8.9).

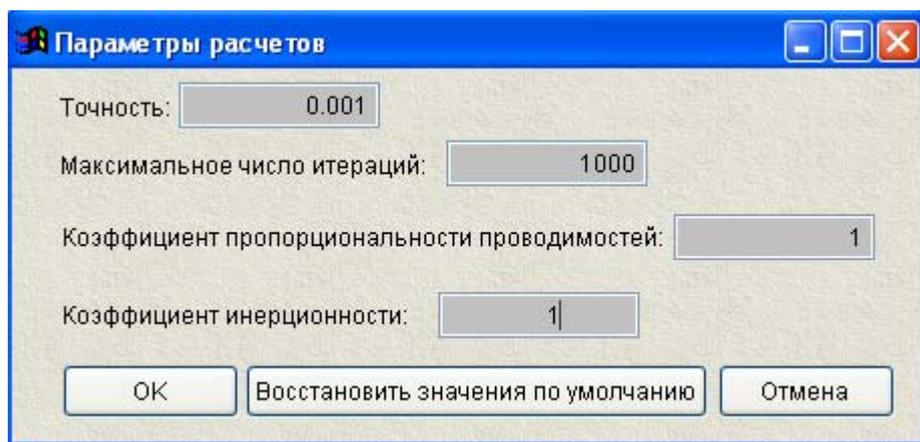


Рис. 8.9. Параметры расчетов

Параметр «Точность» задает значение погрешности, рассчитываемой как сумма модулей разности соответствующих компонент векторов двух последовательных состояний. «Максимальное число итераций» задает принудительную остановку программы после их завершения. Это удобно, если прогноз осуществляется на короткие интервалы времени. Физический смысл двух оставшихся параметров описан в разделе 8.1.5.

Начиная расчет распространения ресурса, программа создает новую таблицу, количество полей в которой переменное и зависит от количества вершин в сети. Она хранит в строках значения ресурса в вершинах на каждом такте ее работы.

На нулевом такте – в первой строке таблицы – хранится начальное состояние. Далее в соответствии с правилами 1-2 начинается пересчет ресурса в каждой вершине. Если водоем замкнут, перераспределение происходит с законом сохранения ресурса. Если же хотя бы одна граница проницаема, ресурс на каждом такте уменьшается. Программа останавливается либо по достижении асимптотической сходимости процесса, либо по выполнении заданного количества итераций.

Работа программы сопровождается графическим выводом распределения ресурса. То есть, динамика распространения ресурса отображается на экранной форме: значение ресурса в каждом узле на каждом

такте задается как радиусом желтого круга в этом узле (непрерывно изменяющимся), так и числовым значением. На любом такте программа может быть прервана нажатием клавиши Esc, причем, это прерывание происходит в штатном режиме, и все полученные данные доступны для дальнейшей обработки. Результатом работы модели является таблица с последовательностью векторов состояний сети на каждом такте.

Эту таблицу программа дополнительно конвертирует в файл Excel и в текстовый документ. Кроме этого, разработано несколько инструментов визуализации результатов. На каждом такте можно получить численное распределение вещества по узлам сетки.

Доступна вся ретроспектива работы программы по шагам. В лист-боксе «Номер итерации t » можно задать любой номер вплоть до максимального. Листая итерации последовательно, можно вновь просмотреть динамику изменения количества вещества в вершинах. На рис. 8.10 представлен сотый такт работы программы с начальными данными, представленными на рис. 8.8.

Для каждого такта программа рисует изолинии распространения вещества в автоматическом режиме (рис. 8.11).

В системе построения изолиний Surfer написан скрипт, позволяющий проследить динамику распространения вещества. Изолинии строятся для каждого такта, и затем сменяют друг друга в режиме реального времени.

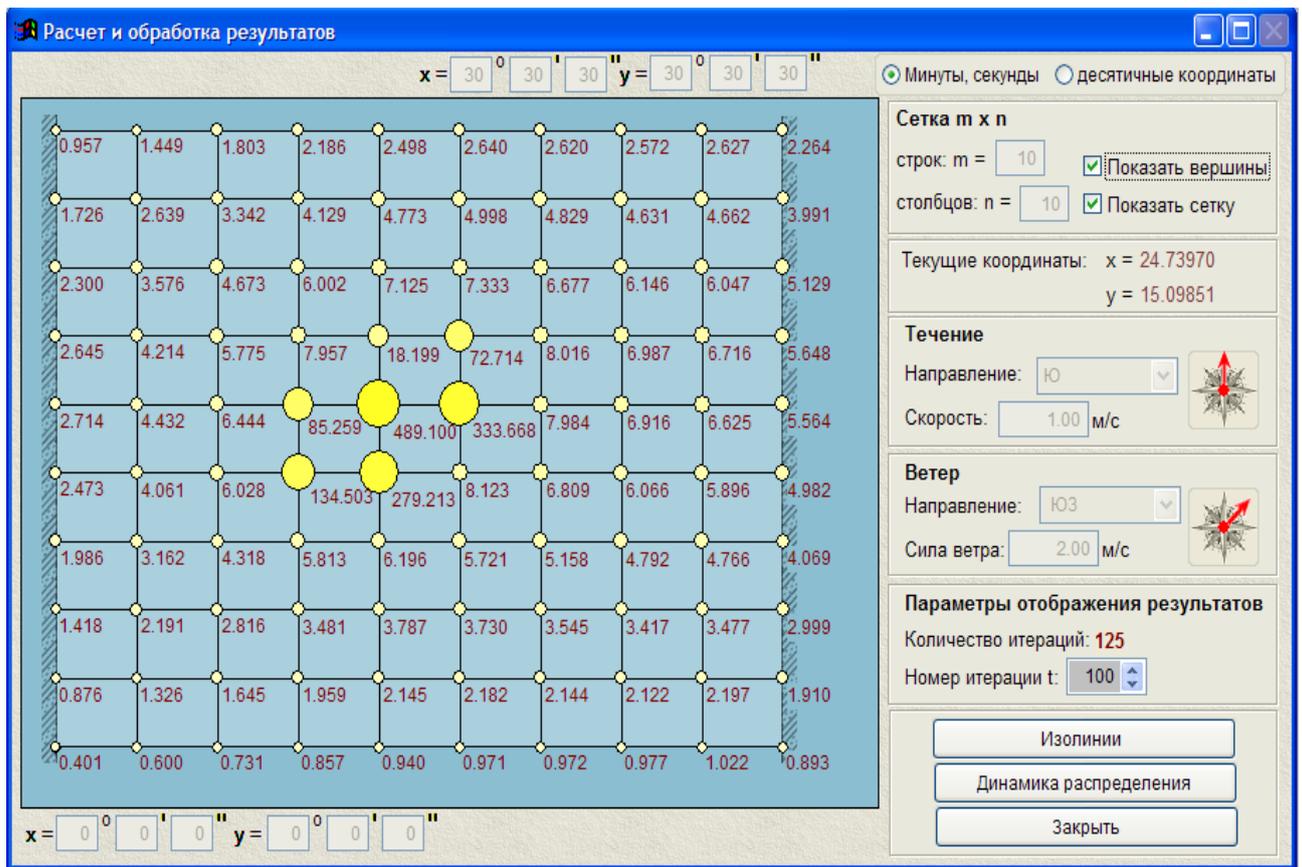


Рис. 8.10. 100-й такт работы программы

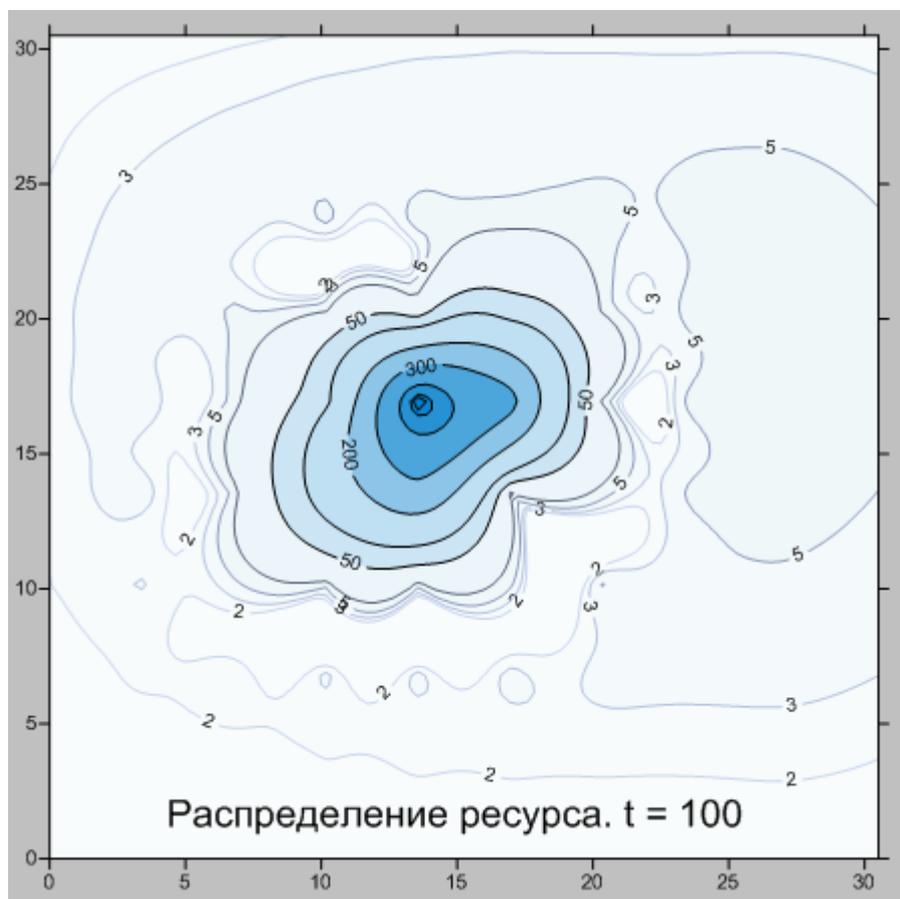


Рис. 8.11. Изолинии для этого же такта ($t = 100$)

8.1.7. Условия применения и возможное расширение модели

Описанная модель позволяет имитировать двумерное распространение вещества в водоеме. Она пригодна для описания водоемов с небольшой вариацией глубин и с равномерным распределением вещества, либо, с веществом, распространяемым лишь по поверхности, как, например, нефть.

Модель для описания динамики вод с учетом глубин должна представлять собой сеть, структура которой является трехмерной решеткой с переменным количеством горизонтальных слоев. Каждый такой слой соответствует сети, описанной в данной работе, однако между слоями, в свою очередь, существуют вертикальные связи.

Пропускные способности горизонтальных и вертикальных ребер должны отличаться друг от друга: вертикальные пропускные способности зависят от степени перемешивания водных слоев, или, напротив, от их стратификации.

Отличительной чертой предложенной модели является ее пространственная и временная масштабируемость, способность делать оперативные и кратковременные прогнозы в режиме реального времени.

Графический интерфейс делает систему удобным и наглядным инструментом для исследования распространения веществ с различными характеристиками в водной среде.

8.2. Программа «Ресурсная сеть»

Программа предназначена для исследования функционирования ресурсных сетей. Сеть в ней задается матрицей пропускных способностей. Входные данные – матрица R и вектор начального состояния $Q(0)$. Точность вычислений, количество знаков после запятой в результате и максимальное число итераций – параметры, настраиваемые пользователем.

Кроме того, программа позволяет выбрать один из двух способов функционирования. Первый из них описан в настоящей работе правилами 1 и 2. Второй состоит в том, что правило 2 заменяется правилом 2', приведенным в разделе 8.1.2, согласно которому каждая вершина сначала отдает ресурс в

петлю, и только затем по всем остальным выходным ребрам. Таким образом, при $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$, начиная с некоторого конечного момента времени ни одна вершина не отдает ресурс вовне. И только при $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ ресурс перераспределяется между вершинами. Этот вариант соответствует так называемым «эгоистическим вершинам», которые распределяют только тот ресурс, который не способны удержать.

Программа написана на языке СУБД Microsoft Visual FoxPro 9.0. Ее интерфейс представлен на рис. 8.12.

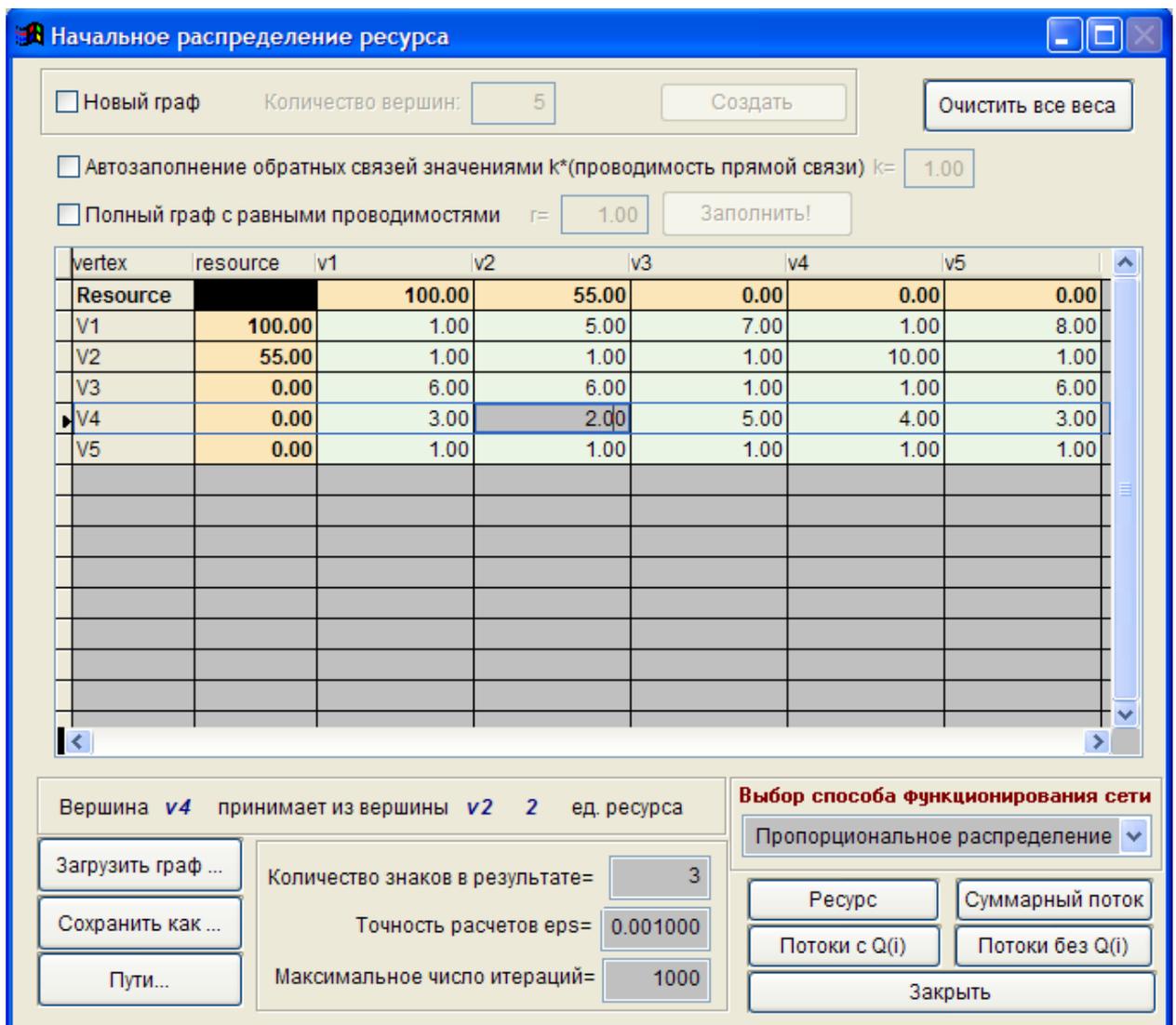


Рис. 8.12. Интерфейс программы «Ресурсная сеть».

Как видно из рисунка 8.12, в программе реализованы основные возможности манипулирования файлами: матрицы пропускных способностей

создаются, редактируются и сохраняются в заданном пользователем каталоге в виде таблиц базы данных. Сохраненные данные можно загружать повторно. При создании нового графа с помощью динамически формируемого SQL-запроса создается пустая таблица с количеством полей, соответствующим заданному пользователем количеству вершин n . Поскольку таблица хранит квадратную матрицу, она будет содержать n записей. Заполнение полей таблицы значениями пропускных способностей частично автоматизировано: можно создать полный однородный граф с указанной пропускной способностью (это удобно, если некоторые пропускные способности встречаются чаще остальных, чтобы сократить работу по набору данных). Флаг «Автозаполнение обратных связей...» позволяет упростить ввод данных в двусторонних сетях. Если сеть симметрична, при коэффициенте $k = 1$ нижний треугольник матрицы заполнится автоматически. Кнопка «Очистить все веса» удаляет данные из таблицы.

Результат работы программы можно получить в одном из четырех видов:

- потактовые значения ресурса в вершинах;
- потактовые значения входных потоков каждой вершине (и суммарный поток);
- потоки по каждому ребру на каждом такте (с координатами вектора состояния);
- потоки по каждому ребру на каждом такте (без координат вектора предельного состояния).

ti	vertex	v1	v2	v3	v4	v5	SumOut
0	q(0)	100.000	55.000	0.000	0.000	0.000	155.000000
0	v1	1.000	5.000	7.000	1.000	8.000	22.000000
0	v2	1.000	1.000	1.000	10.000	1.000	14.000000
0	v3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000000
0	v4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000000
0	v5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000000
1	S_in	2.000	6.000	8.000	11.000	9.000	36.000000
1	q(1)	80.000	47.000	8.000	11.000	9.000	155.000000
1	v1	1.000	5.000	7.000	1.000	8.000	22.000000
1	v2	1.000	1.000	1.000	10.000	1.000	14.000000
1	v3	2.400	2.400	0.400	0.400	2.400	8.000000
1	v4	1.941	1.294	3.235	2.588	1.941	10.999000
1	v5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.000000
2	S_in	7.341	10.694	12.635	14.988	14.341	59.999000
2	q(2)	65.341	43.694	12.635	14.988	18.341	154.999000
2	v1	1.000	5.000	7.000	1.000	8.000	22.000000
2	v2	1.000	1.000	1.000	10.000	1.000	14.000000
2	v3	3.791	3.791	0.632	0.632	3.791	12.637000
2	v4	2.645	1.763	4.408	3.527	2.645	14.988000
2	v5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.000000
3	S_in	9.436	12.554	14.040	16.158	16.436	68.624000
3	q(3)	52.777	42.248	14.040	16.158	29.777	155.000000
3	v1	1.000	5.000	7.000	1.000	8.000	22.000000
3	v2	1.000	1.000	1.000	10.000	1.000	14.000000
3	v3	4.212	4.212	0.702	0.702	4.212	14.040000

Рис. 8.13. Результат работы программы. Потоки по каждому ребру на каждом такте (с координатами вектора состояния)

В двух последних случаях, как видно из рис. 8.13, для каждого такта строится матрица потока на ребрах. Суммарные входной и выходной поток в вершинах рассчитываются как суммы соответствующих строк и столбцов матрицы $F(t)$.

Результаты выдаются на экран, и при этом автоматически заносятся в текстовый файл. Ярлык со значком Excel вызывает макрос, создающий и открывающий файл result.xls (для состояний) и result1.xls (для потоков) и заносящий туда протокол функционирования.

Все описанные в работе примеры рассчитаны с помощью данной программы.

Выводы

1. Предложена модель распространения вещества в водной среде, основанная на двусторонней неоднородной ресурсной сети.

2. Описаны принципы построения ресурсной сети, соответствующей полям течения на заданной акватории; задан принцип функционирования сети.

3. Определены управляющие параметры, позволяющие варьировать скорость процесса распространения, скорость оседания вещества и длительность периода моделирования.

4. Описана программная реализация модели.

5. Описана программа «Ресурсная сеть», с помощью которой были произведены все численные эксперименты данной работы.

На оба программных продукта получены свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам: свидетельство № 2010617261: Модель неоднородной ресурсной сети «Resource Distribution» и свидетельство № 2010617260: Модель распространения химических веществ и пассивных биологических объектов «Substance Spreading».

Модель распространения химических веществ и пассивных биологических объектов «Substance Spreading», используется в Азовском научно-исследовательском институте рыбного хозяйства, что подтверждено соответствующим актом внедрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована новая нелинейная динамическая потоковая модель – ресурсная сеть. Введены основные определения для описания функционирования ресурсных сетей, предельных состояний и потоков. Введена классификация ресурсных сетей; описаны свойства всех классов, указаны основные различия в функционировании сетей, принадлежащих разным классам; различия в функционировании при малых и больших ресурсах внутри каждого класса. Исследован пороговый характер смены правил функционирования сети. Работа содержит анализ динамических процессов, происходящих в конечном и бесконечном времени, их зависимость от внутренних параметров сети, таких, как ее топология и пропускные способности ребер, а также зависимость от внешних параметров, к которым относится суммарный ресурс сети и его распределение по вершинам в начальном состоянии. Некоторые классы сетей отличаются толерантностью к изменению начальных состояний при неизменном суммарном ресурсе; другие классы демонстрируют зависимость предельного состояния от начального. Существование сетей, чувствительных к внешним воздействиям, делает возможным ставить и решать на них задачи управления, описанные в настоящей работе.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Исследована нелинейная динамическая потоковая модель – ресурсная сеть. Исследован пороговый характер смены правил функционирования сети. Проведена классификация сетей.

2. Доказаны существование и единственность порогового значения ресурса в каждом классе сетей, за исключением поглощающих; найдены формулы для его вычисления.

3. Разработаны методы нахождения предельных состояний и потоков в каждом классе сетей. В классах сетей, не имеющих равновесных состояний, описано их поведение в бесконечном времени.

4. В несимметричных регулярных и циклических сетях введено понятие потенциальных аттракторов. Показано, что если в сети имеется более одного аттрактора, в аттракторах и только в них при больших ресурсах предельное состояние зависит от начального. Аттракторы по способу функционирования разделены на активные и пассивные. Найден критерий аттрактивности вершин в эргодических сетях.

5. В эйлеровых сетях, где любая вершина является пассивным потенциальным аттрактором, найдена аналитическая зависимость предельного состояния от начального.

6. Описаны колебательные процессы в циклических сетях при малых ресурсах, найдены d предельных векторов в d -циклической сети и ее предельные матрицы. Найден класс начальных состояний, при которых существует глобальное равновесие; найден вектор равновесного состояния. При больших ресурсах доказано, что циклическая сеть приобретает свойства регулярной сети, и предельное состояние и поток в ней всегда существуют.

7. Исследованы поглощающие ресурсные сети. Показано, что в этих сетях порогового значения ресурса не существует, и предельное состояние при любом суммарном ресурсе зависит от начального состояния линейно. Найдена матрица перехода в предельное состояние. Доказано, что предельное состояние в поглощающих сетях не зависит от пропускных способностей петель. Это означает (при малых ресурсах), что степени различных стохастических матриц, соответствующих матрицам пропускных способностей с разными диагональными элементами, в пределе одинаковы. При больших ресурсах это утверждение еще сильнее: произведения переменных стохастических матриц, описывающие функционирование неоднородных цепей Маркова, также сходятся к одному и тому же пределу, независимо от диагональных элементов порождающих их матриц пропускных способностей.

8. Выделены классы сетей, в которых может быть поставлена и решена задача управления. Это сети с несколькими потенциальными аттракторами, и

поглощающие сети с несколькими стоками. Найдена зависимость распределения ресурса в целевых вершинах от его начального распределения по управляющим, не-аттрактивным, вершинам. Поставлены прямая и обратная задачи управления на выделенных классах сетей. Показано, что обе задачи сводятся к задаче квадратичной оптимизации с выпуклой целевой функцией.

9. Разработан программный инструмент для экспериментальных исследований ресурсных сетей.

10. Разработана модель распространения загрязняющих веществ в водной среде на основе ресурсной сети. Данные о полях течений представляются в виде пропускных способностей сети, представленной двумерной решеткой. Программная реализация этой модели позволяет проигрывать многочисленные сценарии, изменяя скорость распространения вещества и скорость его оседания.

11. Два указанных программных продукта защищены свидетельствами о регистрации программ для ЭВМ. Модель распространения загрязняющих веществ в водной среде внедрена в ФГУП АзНИИРХ, что подтверждено актом о внедрении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15 – 43.
2. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Остовные леса орграфа и их применение // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 108 – 133.
3. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. О нахождении собственного проектора и компонент матрицы // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 10. – С. 3–12.
4. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 470–505.
5. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 38–59.
6. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Поточковые алгоритмы. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
7. Алексеев В.В., Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. (ред.) Теория графов. Покрытия, укладки, турниры. Сборник переводов. – М.: Мир, 1974. – 224 с.
8. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы. Модели вычислений. Структуры данных. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. – 307 с.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
10. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
11. Арбиб М.А. (ред.) Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп: Пер. с англ. – М.: Статистика, 1975. – 335 с.

12. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы: 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2010. – 368 с.
13. Асельдеров З.М., Донец Г.А. Представление и восстановление графов. – Киев: Наукова думка, 1991. – 192 с.
14. Ахременков А.А. Моделирующий комплекс для имитации водных экосистем. – М.: ВЦ АН СССР, 1988. – 48 с. – (Сообщения по прикладной математике / АН СССР. ВЦ)
15. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Изд. 2-е, испр. и доп. – Таллин: Валгус, 1977. – 280 с. 1977. – 280 с.
16. Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М. Смешанная достижимость на частично ориентированных графах // Деп. в ВИНТИ, 1982, №5892-82.
17. Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М. Различные виды смешанной достижимости // Алгебра и дискретная математика. Элиста, КГУ. 1985. С. 70 – 75.
18. Басакер Р.Д., Саати Т.Л. Конечные графы и сети: Пер. с англ. – М.: Наука, 1974. – 366 с.
19. Белов В.П., Филиппов Ю.Г. Основные черты динамики вод Азовского моря и Керченского пролива. // Тр.ГОИН, вып.139, – М. 1978. С. 11–20.
20. Берг А.И., Бирюков Б.В., Геллер Е.С., Поваров Г.Н. (ред.) Управление, информация, интеллект. – М.: Мысль, 1976. – 383 с.
21. Берж К. Теория графов и ее применения: Пер. с франц. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.
22. Бурман Ю.М. Многочлен Татта и модель случайных кластеров, Матем. просв., сер. 3, 11, – М.: МЦНМО, 2007. С. 47 – 60.
23. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. О малых случайных возмущениях динамических систем // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
24. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972 г. – 552 с.

25. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
26. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
27. Воловик Г.С. Разработка и исследование системы имитационных моделей зоопланктонного сообщества (на примере экосистемы Азовского моря). Автореферат дис. на соиск. учен. степени канд. технич. наук. – Ростов-на-Дону, 1997. – 24 с.
28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
29. Годовников М.Н., Жилиякова Л.Ю., Сазонова Л.И., Воловик С.П., Луц Г.И., Рогов С.Ф., Мирзоян З.А. Интеллектуальная система прогнозирования запасов азовской тюльки и хамсы. / Годовников М.Н. и др. //Труды АзНИИРХ – Ростов-на-Дону: БКИ, 1998. С. 388 – 397.
30. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2010. – 228 с.
31. Губанов Д.А., Новиков Д.А. Модели унифицированного информационного управления в однородных социальных сетях / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010. С. 722 – 742.
32. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения – М.: Мир, 2001. – 435 с.
33. Дюндюков В.С. Моделирование взаимодействия интеллектуальных агентов: применение ресурсных графов. Труды международного конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям (AIS-IT'2010, Дивноморское, 2-10 сентября 2010 г.) – М.: Физматлит, 2010. – Т. 1. С. 204 – 210.
34. Дюндюков В.С., Тарасов В.Б. Ресурсно-целевые сети: использование в многоагентных системах // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник трудов VI-й

- Международной научно-практической конференции (Коломна, 16-19 мая 2011 г.) – М.: Физматлит, 2011. – Т. 1. С. 483 – 495.
35. Дюндюков В.С., Тарасов В.Б. Формирование многоагентных систем с помощью ресурсно-целевых сетей // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2012): материалы Международной научно-технической конференции. Минск: БГУИР, 2012. С. 257 – 265.
 36. Ерзин А.И., Тахонов И.И. Задача поиска сбалансированного потока // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006, том IX, № 4 (28). С. 50-63.
 37. Ерзин А.И., Тахонов И.И. Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005, том VIII, № 3(23). С.58-68.
 38. Ерусалимский Я.М. Потoki в сетях с нестандартной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. 2012. № 1. – с.5-7
 39. Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996, №2. С. 14-17.
 40. Ерусалимский Я.М., Петросян А.Г. Многопродуктовые потоки в сетях с нестандартной достижимостью // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2005, №6. С. 8-16.
 41. Ерусалимский Я.М., Петросян А.Г. Случайные процессы в сетях с биполярной магнитностью // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2005, №11. С. 10-16.
 42. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Общий подход к нестандартной достижимости на графах.// Известия вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естест. Науки. 2005, Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. С. 64-67.

43. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003, №2. с. 3-5.
44. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.
45. Жияякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика, 2011, № 4. С.133-143.
46. Жияякова Л.Ю. Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде // Проблемы управления, 2011, № 2. С. 46 – 51.
47. Жияякова Л.Ю. Полные несимметричные ресурсные сети. Случай одного приемника // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. № 4 (164) 2011. С. 14 – 18.
48. Жияякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация // Автоматика и телемеханика, 2012, №6. С. 103–118.
49. Жияякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний // Автоматика и телемеханика, 2012, №7. С.67–77.
50. Жияякова Л. Ю. Исследование эйлеровых ресурсных сетей / Управление большими системами. Выпуск 41. М.: ИПУ РАН, 2013. С. 28 – 50.
51. Жияякова Л.Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах / Управление большими системами. Выпуск 43. М.: ИПУ РАН, 2013. С. 34 – 54.
52. Жияякова Л.Ю. Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях // Проблемы управления, 2013, № 3. С. 51-59.
53. Жияякова Л.Ю. Поиск в ассоциативной модели памяти // IX международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2009. Киев, «Просвіта», 2009. С. 124 – 130.

54. Жилякова Л.Ю. Алгоритм построения ассоциативной ресурсной сети // X международная научно-техническая мультikonференция. Актуальные проблемы информационно-компьютерных технологий, мехатроники и робототехники, 2009. С. 232 – 236.
55. Жилякова Л.Ю. Процессы изменения проводимостей в ассоциативной ресурсной сети // X международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2010. Киев, «Просвіта», 2010. С. 85 – 91.
56. Жилякова Л.Ю. Реализация рекурсивных запросов в динамической ассоциативной ресурсной сети // Двенадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ'2010. Труды конференции, том 1. М. – Физматлит, 2010. С. 335 –343.
57. Жилякова Л.Ю. Рекурсивный поиск в динамической ассоциативной ресурсной сети // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2011): материалы Международной научно-технической конференции. Минск, 10-12 февраля 2011. С. 155 – 160.
58. Жилякова Л.Ю. Ресурсная сеть как модель переноса вещества в водной среде // XI международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2011. Киев, «Просвіта», 2011. С. 196 – 202.
59. Жилякова Л.Ю., Кузнецов О.П. Ресурсные сети и процессы рассеяния на графах. // Теория активных систем / Труды международной научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том 1. С. 55 – 58.
60. Жилякова Л.Ю. Дискретные модели рассеяния на графах // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2012):

материалы Международной научно-технической конференции. Минск: БГУИР, 2012. С. 71 – 76.

61. Жияякова Л.Ю. Модели рассеяния на графах и их приложения // XII международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2012. Киев, «Просвіта», 2012. С. 181 – 187.
62. Жияякова Л.Ю. Механизмы структурирования информации в ассоциативной модели памяти // Пятая международная конференция по когнитивной науке. 18–24 июня 2012 г., Калининград. С. 802 – 803.
63. Жияякова Л.Ю. Управление распределением ресурса в неоднородных ресурсных сетях // Тринадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2012 (16-20 октября 2012 г., Белгород, Россия): Труды конференции. Т. 3. – Белгород: изд-во БГТУ, 2012. С. 48 – 55.
64. Жияякова Л.Ю. Организация памяти в ассоциативной ресурсной сети с переменной топологией // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2010. Аннотации докладов. Том 3. М. Изд-во НИЯУ МИФИ, 2010. С. 77.
65. Жияякова Л.Ю. Модель ассоциативной памяти, основанная на динамической ресурсной сети // 5-я Российская мультikonференция по проблемам управления (МКПУ-2012). «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012). Санкт-Петербург, 2012. С. 1160 – 1163.
66. Замбицкий Д.К., Лозовану Д.Д. Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 171 с.
67. Зутлер И.А. Выбор последовательными сравнениями как непрерывное марковское блуждание // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 60–74.
68. Зыков А.А. Теория графов, Итоги науки. Алгебра. Топол. 1962, ВИНТИ, М., 1963. С. 188 – 223.
69. Зыков А.А. Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука, 1969. – 543 с.

70. Зыков А.А. Основы теории графов. – М: Наука, 1987. – 384с.
71. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
72. Исследование операций: В 2-х томах. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. - 712 с.+ 677 с.
73. Калмыков Г.И. Древесная классификация помеченных графов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 192 с.
74. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука. 1970. – 272 с.
75. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование: некоторые приложения: пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1972. – 192 с.
76. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: МГУ, 1983. – 394 с.
77. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969.
78. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Об эффективности комбинаторных методов в дискретном программировании // Современное состояние теории исследования операций. – М.: Наука, 1979. – С. 283-310.
79. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2002. – 960 с.
80. Корноушенко Е. К. Управление равновесными состояниями билинейных нормированных моделей, Проблемы управления, 2012, № 5, с. 2–8.
81. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 432с.
82. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск, Вышэйшая школа. 1994. – 286 с.
83. Кузнецов О.П. Однородные ресурсные сети. I. Полные графы // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. С.136-147.

84. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Двусторонние ресурсные сети – новая потоковая модель // Доклады Академии Наук, 2010, том 433, № 5. С. 609 – 612.
85. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010. С. 640 – 664.
86. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Процессы стабилизации в динамических ресурсных сетях // Труды Научной сессии НИЯУ МИФИ-2010. В 6 томах. Том V. Информационно-телекоммуникационные системы. Проблемы информационной безопасности. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 53 – 56.
87. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Исследование эргодичности ресурсных сетей с произвольной проводимостью // X международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2010. Киев, «Просвіта», 2010. С. 106 – 112.
88. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Ресурсные сети и их приложения в информационных технологиях. // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2011): материалы Международной научно-технической конференции. Минск, 10-12 февраля 2011. С. 147 – 154.
89. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Ресурсные сети: предельные состояния и потоки. Материалы 4-й Всероссийской мультikonференции по проблемам управления МКПУ-2011, Т.1. Таганрог: изд. ТТИ ЮФУ 2011. С. 62 – 66.
90. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю., Губанов Д.А., Куливец С.Г. Сетевые модели: ресурсы, влияния, конфликты // Системный анализ и семиотическое моделирование: материалы первой всероссийской конференции с международным участием (SASM-2011). – Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ, 2011. С. 225 – 232.

91. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю., Губанов Д.А., Куливец С.Г. Сетевые модели в социально-экономической сфере // XI международная конференция имени Т.А. Таран Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2011. Киев, «Просвіта», 2011. С. 233 – 240.
92. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Управление предельным состоянием в ресурсных сетях // 5-я Российская мультikonференция по проблемам управления (МКПУ-2012). «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012). Санкт-Петербург, 2012. С. 1176 – 1179.
93. Кузьминова М.В. Ограниченные магнитные достижимости на ориентированных графах // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2006, №6. – С. 12 – 26.
94. Куссуль Н., Соколов А. Адаптивное обнаружение аномалий в поведении пользователей компьютерных систем с помощью марковских цепей переменного порядка. Ч.2: Методы обнаружения аномалий и результаты экспериментов // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 4. – С. 83 – 88.
95. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Исследование задач с отношениями предшествования и ресурсными ограничениями. / Научное издание. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. 2007. – 80 с.
96. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука. 1982. – 272 с.
97. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 653 с.
98. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. – 232 с.
99. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 328 с.

100. Матряшин Н.П, Макеева В.К. Математическое программирование. – Харьков, «Вища школа», 1978. – 180 с.
101. Мелихов А.Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 416 с.
102. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А. И. Штерна. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с.
103. Миркин Б.Г., Родин С.И. Графы и гены. – М: Наука, 1977. – 236 с.
104. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию / под ред. Б.Т. Поляка, С.А. Назина. – М.: МЦНМО, 2010. – 280 с.
105. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003.
106. Оре О. Графы и их применение: Пер. с англ. – М: Мир, 1965. 176 с.
107. Оре О. Теория графов. Пер. с англ. – М: Наука, 1980. 334 с.
108. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. – М.:Мир, 1983. – 384 с.
109. Петросян А.Г. Поточковая задача в многопродуктовых сетях с нестандартной достижимостью // Современные проблемы математического моделирования. Ростов-на-Дону, 2005. С. 334 – 340.
110. Петросян А.Г. Потоки в сетях с биполярной достижимостью. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2006, №3. – С. 32 – 37.
111. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
112. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М. Наука, 1986. – 496 с.
113. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. – Государственное издательство научно-технической литературы. Москва-Ленинград. 1949. – 436 с.

114. Сарымсаков Т.А. Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова // Доклады Академии наук СССР. – 1953. – Т.90, №1. – С. 25 –28.
115. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
116. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С++. Алгоритмы на графах. ДиаСофтЮП, 2002. – 496 с.
117. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
118. Скороходов В.А. Графы с магнитной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях.//деп. в ВИНТИ, 2003, №410-В2003.
119. Спеваков В.Н., Кудрявцев А.Б. Абсолютная суммируемость ортогональных рядов методом Эйлера // Матем. заметки, 21:1 (1977). С. 51 – 56.
120. Стефанюк В.Л. Обобщенные цепи Маркова // Искусственный интеллект и принятие решений. М. 2011. №4. С. 95 – 99.
121. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
122. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
123. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 565 с.
124. Уилсон Р. Введение в теорию графов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
125. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматлит, 1963. – 656 с.
126. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, тт. 1, 2. – М.: Мир, 1967.
127. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.

128. Фельзенбаум А.И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. – М.: АН СССР, 1960. – 198 с.
129. Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы. Пер. с англ. – М.: Мир, 2002. – 176 с.
130. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. Пер. с англ. – М.: Мир, 1996. – 334 с.
131. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 168 с.
132. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки: Перевод с англ. /Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Связь, 1978. – 448 с.
133. Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
134. Харари Ф., Палмер Е. Перечисление графов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 324 с.
135. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.
136. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
137. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. – 520 с.
138. Цой С., Цхай С.М. Прикладная теория графов. – Алма-Ата: Наука, 1971. – 500 с.
139. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136 – 151.
140. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Об асимптотике в моделях консенсуса. / Управление большими системами. Выпуск 43. М.: ИПУ РАН, 2013. С.55-77.
141. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. – М., Дело, 2000. – 440 с.
142. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

143. Aiello W., Awerbuch B., Maggs B. and Rao S. Approximate load balancing on dynamic and asynchronous networks, Proc. 25th ACM Symp. of Theory of Computing. 1993. P. 632–634.
144. Ahremenkov A., Voinov A. Interactive System for Biogeochemical Modeling of Water Bodies. // SCOPE/UNEP Sonderband, – Hamburg, Feb.1992, – P. 263–272.
145. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, United States, 1993.
146. Aldous D.J. Lower bounds for covering times for reversible Markov chains and random walks on graphs. J. Theoret. Probab. 2, no. 1. 1989. P. 91 – 100.
147. Aleliunas R., Karp R.M., Lipton R.J., Lovász L., and C. W. Rackoff. Random walks, universal travelling sequences, and the complexity of maze problem // Proc. 20th Ann. Symp. on Foundations of Computer Science. P. 218 – 223, 1979.
148. Anderson, R. J., Lovász L., Shor, P. W., Spencer, J., Tardos, E. and Winograd, S. Disks, balls, and walls: analysis of a combinatorial game // Amer. Math. Monthly 96. 1989. P. 481–493.
149. Bak P. How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. New York: Copernicus. 1996. (Рус. пер. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности. – М.: УРСС: Книжный дом «Либроком», 2013. – 276 с.)
150. Bak P., Tang C., and Wiesenfeld K. Self-organized criticality, Physical Review A 38. 1988, P. 364 – 374.
151. Bak P., Chen K. Self-organized criticality. Scientific American 264, January 1991 issue. P. 46 – 53.
152. Bayer D. and Diaconis P. Trailing the dovetail shuffle to its lair. Ann. Appl. Probab. 2. 1992, P. 294–313.
153. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. – 2nd ed. New York: Springer, 2003.

154. Biggs N.L. Chip-Firing and the Critical Group of a Graph // Journal of Algebraic Combinatorics 9 (1999). P. 25–45. Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 1999.
155. Biggs N. The Tutte-polynomial as a growth function // J. Algebraic Combinatorics 10. 1999, P. 115–133.
156. Björner A., Lovász L., and Shor P. Chip-firing games on graphs // Europ. J. Comb. 12 (1991), 283–291.
157. Björner A. and Lovász L. Chip-firing games on directed graphs, J. Algebraic Combinatorics 1. 1992. P. 305–328.
158. Blanchard Ph., Volchenkov D. Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics). Springer-Verlag – Berlin–Heidelberg. 2011.
159. Blanchard Ph., Petroni F., Serva M., Volchenkov D., Geometric representations of language taxonomies. Comput. Speech Lang. 2010. doi: 10.1016/j.csl.2010.05.003
160. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004, 727 p.
161. Brin S., Page L. The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web URL: <http://infolab.stanford.edu/~backrub/pageranksub.ps>
162. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – Vol. 356. – P. 253–274.
163. Chen W. Applied graph theory. American Elsevier, New York, 1971.
164. Chung F., Ellis R. A chip-firing game and Dirichlet eigenvalues // Discrete Math. 257. 2002. P. 341-355.
165. Chung F. Laplacians and the cheeger inequality for directed graphs. Ann. Comb. 9, 1. 2005.
166. Cori R. and Rossin D. On the sandpile group of dual graphs // Europ. J. Comb. 21. 2000. P. 447–459.
167. Dasgupta K., Singh R., Viswanathan B., Chakraborty D., Mukherjea S., Nanavati A.A. Social Ties and their Relevance to Churn in Mobile Telecom

- Networks // Proceedings of the 11th international conference on Extending database technology EDBT'08: Advances in database technology ACM New York, NY, USA. 2008.
168. De Groot M.H. Reaching a Consensus // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118-121.
169. Dhar D. Self-organized critical state of sandpile automaton models, Physical Review Letters 64. 1990, pp. 1613 – 1616.
170. Dhar D. The abelian sandpile and related models // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Volume 263, Issues 1–4, 1 February 1999. P. 4 – 25.
171. Dhar D., Sadhu T., Chandra S. Pattern formation in growing sandpiles // Euro. Phys. Lett. Volume 85, Number 4, 48002. 2009. arXiv:0808.1732 [cond-mat.stat-mech]
172. Dhar D., Ruelle P., Sen S., Verma D.-N. Algebraic Aspects of Abelian Sandpile Models. 1994. arXiv:cond-mat/9408020
173. Diestel R. Graph Theory – Springer, 2005. – 410 p.
174. Edmonds J., Karp R.M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. – J. ACM. 1972, 19, №2. P. 248 – 264.
175. Engel A. The probabilistic abacus, Educ. Stud. in Math. 6. 1975. P. 1 – 22.
176. Engel A. Why does the probabilistic abacus work? Educ. Stud. in Math. 7. 1976. P. 59 – 69.
177. Eskin E. Anomaly detection over noisy data using learned probability distributions // Proc. 17 International Conf. on Machine Learning. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2000. P. 255 – 262.
178. Fleischer L., Skutella M. Minimum Cost Flows Over Time without Intermediate Storage. // Proc. 35th ACM/SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA), Baltimore, MD, January 2003. P. 66-75.
179. Hajnal J. The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 67 – 77.

180. Hajnal J. Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1958. – Vol. 54. – P. 233 – 246.
181. Hu T.C. Multy-commodity network flows. – J. ORSA, 1963. №11 (3). P. 344 – 360.
182. Ivashkevich E.V., Priezzhev V.B. Introduction to the sandpile model. Physica A 254, 97–116. 1998.
183. Koliha J.J., Block Diagonalization, Mathematica Bohemica, 2001, vol. 126. P. 237–246.
184. Koliha J.J. and Straškraba, I., Power Bounded and Exponentially Bounded Matrices, Appl. Math., 1999, vol. 44. P. 289–308.
185. Kuznetsov O.P., Zhilyakova L.Yu. Flows and Limit States in Bidirectional Resource Networks// Preprints of the 18th IFAC World Congress. Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011. P. 14031-14035
186. Kuznetsov O. P., Zhilyakova L.Yu. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states. // Management and Production Engineering Review. Volume 2, Number 3, September 2011. P. 33–39
187. Lancaster P., Tismenetsky M. The Theory of Matrices, 2nd ed. New York: Academic Press, 1985.
188. Lopez C.M. Chip firing and the Tutte polynomial // Annals of Combinatorics, 1. 1997. P. 253 – 259.
189. Lovász L. and Winkler P. Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph // Surveys in Combinatorics, 1995 (ed. P. Rowlinson), London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press. P. 119 – 154.
190. Maes C., Redig F., and Saada E. The Abelian sandpile model on an infinite tree // Ann. Probab. Volume 30, Number 4 (2002), 2081-2107.
191. Maes C., Redig F., and Saada E. Abelian Sandpile Models in Infinite Volume. March, 2005. 24 p. URL: http://www.academia.edu/2491250/Abelian_sandpile_models_in_infinite_volume
192. Maes C., Redig F., Saada E. The infinite volume limit of dissipative abelian sandpiles, Commun. Math. Phys. 244, No. 2, 395–417. 2004.

193. Meester R., Redig F., and Znamenski D. The Abelian sandpile; a mathematical introduction. 2008. 20 p. URL: http://www.cs.vu.nl/~rmeester/onderwijs/introduction_spatial_models/sandpile2.pdf
194. Meshbahi M., Egerstedt M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010.
195. Meyer C.D., Jr., The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // SIAM Review. – 1975. – Vol. 17, № 3. – P. 443–464.
196. Meyer C.D., Jr., Limits and the Index of a Square Matrix, SIAM J. Applied Math., 1974, vol. 26. P. 469–478.
197. Meyn S., Tweedie R.L. Markov Chains and Stochastic Stability. Cambridge University Press. 2009. 237 p.
198. Norris J.R. Markov Chains. Cambridge University Press. 1998. 237 p.
199. Priezzhev V.B., Structure of two-dimensional sandpile. I. Height probabilities. Journal of Stat. Phys. 74, 955–979 (1994).
200. Prisner E. Parallel Chip Firing on Digraphs // Complex Systems 8. 1994. P. 367 – 383.
201. Redig F., Mathematical aspects of the abelian sandpile model. June, 2005. 60 p. URL: <http://www.math.leidenuniv.nl/~redig/sandpilelectures.pdf>
202. Ren W., Cao Y., Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues. London: Springer, 2011.
203. Rothblum U.G. Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization II, ser. Mathematical Programming Study, R.J.-B. Wets, ed. Amsterdam: North-Holland. – 1976. – Vol. 6. – P. 188–201.
204. Seneta E. Non-negative Matrices and Markov Chains. Springer. 2006. –279 p.
205. Speer E. R. Asymmetric abelian sandpile models // Journal of Statistical Physics. April 1993, Volume 71, Issue 1-2. P. 61 – 74.
206. Spencer J. Balancing vectors in the max norm. Combinatorica, v. 6. 1986. P. 55 – 66.

207. Turcotte D.L., Self-Organized Criticality, Rep. Prog. Phys. 62. 1999. P. 1377–1429.
208. Volchenkov D., Volchenkova L., Blanchard P. Epidemic spreading in a variety of scale free networks. // Physical Review E 66, 046137. – 2002.
209. Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 15. – P. 733 – 736.
210. Ye N. A Markov chain model of temporal behavior for anomaly detection // Proceedings of the 2000 IEEE Workshop on Information Assurance and Security United States Military Academy, West Point, NY, 6-7 June, 2000. P. 171 – 174.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Акт о внедрении

Свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2010617260

Модель распространения химических веществ и пассивных биологических объектов «Substance Spreading»

Правообладатель(ли): **Федеральное государственное унитарное предприятие «Азовский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства» (RU)**

Автор(ы): **Жилякова Людмила Юрьевна (RU)**

Заявка № **2010615346**

Дата поступления **31 августа 2010 г.**

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ

29 октября 2010 г.



Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам

Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2010617261

Модель неоднородной ресурсной сети «Resource Distribution»

Правообладатель(ли): *Федеральное государственное унитарное предприятие «Азовский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства» (RU)*

Автор(ы): *Жилякова Людмила Юрьевна (RU)*

Заявка № 2010615345

Дата поступления 31 августа 2010 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
29 октября 2010 г.



Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной
собственности, патентам и товарным знакам

Б.П. Симонов