

Федеральная
Сетевая Компания



Единой
Энергетической Системы

**ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ МОДАЛЬНОГО СИНТЕЗА
АККЕРМАНА И БАССА-ГУРА
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МИМО-СИСТЕМ**

Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.

Магистральные электрические сети Центра, г. Москва

Постановка задачи

1. Задана линейная МІМО-система (Multi Inputs Multi Outputs)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ – вектор выхода;

$$\text{rank} \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] = \text{rank} \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{v-1}\mathbf{B} \right], \quad v = n - r + 1;$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

2. Требуется определить закон обратной связи

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t),$$

обеспечивающий заданный характеристический полином (х.п.)

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0.$$

Известные результаты. СИМО-системы¹

Для линейной СИМО-системы (Single Input Multi Outputs)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad u \in \mathbb{R}^1,$$

$$\Omega_e(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \Omega_e(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0,$$

закон обратной связи $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$, обеспечивающий заданный х.п., определяется *формулой Аккермана (1970)*²

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{e}_n^T \cdot \Omega_e^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cdot \Xi(\mathbf{A}, \beta)$$

где

$$\Xi(\mathbf{A}, \beta) = \mathbf{A}^n + \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \beta_1\mathbf{A} + \beta_0\mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{e}_n = [0 \mid 0 \mid \dots \mid 1]^T \in \mathbb{R}^n.$$

¹ Все нижеследующие формулы регуляторов основаны на преобразованиях А.Н. Крылова.

² Реализован в среде MATLAB в виде функции **acker**.

Пусть также

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n-1} \mid \alpha_{n-2} \mid \cdots \mid \alpha_0]^\top,$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_{n-1} \mid \beta_{n-2} \mid \cdots \mid \beta_0]^\top,$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

тогда закон обратной связи $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$, обеспечивающий заданный х.п., определяется *формулой Басса-Гура (1966)*

$$\mathbf{k} = \left(\mathbf{T} \boldsymbol{\Omega}_e^\top(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \right)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$$

Ленточная формула Аккермана. СИМО-системы

Закон обратной связи $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$, обеспечивающий заданный х.п., определяется ленточной формулой [АиТ, 2007, № 12]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} \\ \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix}_R \right)^\perp \Bigg)^+,$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}^T & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{k}^T \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} \\ \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_L^\perp & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_L^\perp \end{bmatrix}.$$

Здесь $(\cdot)^+$ – псевдообратная матрица; $(\cdot)_R^\perp$, – правый делитель нуля максимального ранга (в данном случае – вектор); $(\cdot)_L^\perp$ – левый делитель нуля максимального ранга.

Делители нуля числовых матриц

Определение 1. Матрица $\mathcal{X} = M_L^\perp$ является левым делителем нуля максимального ранга числовой матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r , если одновременно выполняются условия

$$\mathcal{X}M = 0, \quad \text{rank } \mathcal{X} = n - r.$$

Определение 2. Матрица $\mathcal{Y} = M_R^\perp$ является правым делителем нуля максимального ранга числовой матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r , если одновременно выполняются условия

$$M\mathcal{Y} = 0, \quad \text{rank } \mathcal{Y} = m - r.$$

Замечание. Если у числовой матрицы существует делитель нуля, то он всегда неединственный.

Достоинства ленточной формулы Аккермана

1. В ленточной формуле отсутствует операция взятия степеней матрицы.
2. Обращение матрицы заменено псевдообращением вектора.
3. Неединственность делителей нуля позволяет путем соответствующего выбора представителя получать ленточные матрицы с минимальным числом обусловленности (максимизировать обусловленность задачи). Делители нуля вещественных матриц легко определяются с помощью известных методов QR и SVD разложений.
4. Ленточная формула сильно разрежена, имеет простую структуру с повторяющимися блоками.
5. Вычислительная процедура для ленточной формулы может быть построена на основе экономного рекурсивного алгоритма [АиТ, 2006, № 5].

Известные результаты. ММО-системы

Метод Уилкинсона (1967). Пусть кратность одинаковых корней заданного х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{M}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

не превосходит количества входов r , тогда закон обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, обеспечивающий заданный х.п., определяется формулой

$$\mathbf{K} = \mathbf{NX}^{-1}.$$

Здесь \mathbf{X} – решение алгебраического уравнения Сильвестра

$$\mathbf{AX} - \mathbf{XM} = \mathbf{BN},$$

где $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – произвольная матрица или выбирается из дополнительных условий (робастность – *алгоритм Каутского-Никольса-ван Дурена*).

Формула Нордстрема-Норландера (1997). Пусть

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{M})$$

и матрица Γ – решение матричного уравнения

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\beta_{n-1} \end{array} \right) \otimes \mathbf{I}_r \Gamma = \Gamma \mathbf{M}.$$

Если произведение матриц $\Omega_e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \Gamma$ – несингулярно, тогда закон обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$, обеспечивающий заданный х.п., определяется формулой

$$\mathbf{K} = (\mathbf{e}_n^T \otimes \mathbf{I}_r) \cdot \Gamma \cdot (\Omega_e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \Gamma)^{-1} \cdot \Xi(\mathbf{A}, \beta)$$

Проблемы

1. Обратимость произведения матриц $\Omega_e(A, B) \cdot \Gamma$.
2. Плохая обусловленность.
3. Быстрый рост размерности.
4. Трудность параметризации (построения множества эквивалентных регуляторов).
5. Невозможность построения орбиты действия обратной связи, поскольку $\Xi(A, \alpha) = 0$. В данном случае под орбитой действия обратной связи понимается множество всех K , при которых

$$\det(\lambda I_n - A + BK) = \det(\lambda I_n - A).$$

Пример: компенсация узлов сети энергосистемы (сенсоров), параметры режима которых наиболее чувствительны к малым внешним возмущениям в виде изменения активных и реактивных нагрузок, без изменения значения корней х.п. всей энергосистемы.

Методы и алгоритмы модального синтеза ММО-систем

Мейна – Мардоха (1970),
Маки – ван де Вейта (1974),
Барнетта (1975),
Гоуришанкара – Ремера (1976),
Мура (1976),
Клейна – Мура (1977, 1982),
Портера – Д'Аццо (1978),
Уонема (1979),
Мунро (1979),
Флемма (1980),
Варги (1981),
Феми – О'Рейли (1982),
Каутского – Никольса – ван Дурена³ (1985).

³ Реализован в среде MATLAB в виде функции **place**.

Вспомогательные построения

Пусть матрица \mathbf{B} разбита на блоки

$$\mathbf{B} = [\mathcal{Z} \mid \mathbf{b}] = [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_{r-1} \mid \mathbf{b}_r],$$

т.е.

$$\mathcal{Z} = [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_{r-1}], \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_r.$$

Тогда при $\nu = n - r + 1$ можно записать

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & A\mathcal{Z} & \cdots & A^{n-1}\mathcal{Z} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & A\mathcal{Z} & \cdots & A^{n-r}\mathcal{Z} \end{bmatrix} < n.$$

Лемма 1 [Андреев Ю.Н.]. Пусть (\mathbf{A}, \mathbf{B}) – полностью управляемая пара, тогда существует такая матрица $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times n}$, что пара матриц $(\mathbf{A} - \mathcal{Z}\mathcal{K}, \mathbf{b})$ полностью управляемая.

Лемма 2. Пусть (A, B) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$, и пусть задана такая матрица $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times n}$, что пара матриц $(A - \mathcal{B}\mathcal{K}, b)$ полностью управляемая. Тогда закон обратной связи

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathcal{K} \\ \mathbf{k}^T \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{e}_n^T \cdot \Omega_e^{-1}(A - \mathcal{B}\mathcal{K}, b) \cdot \Xi(A - \mathcal{B}\mathcal{K}, \beta),$$

$$\Omega_e(A - \mathcal{B}\mathcal{K}, b) = \left(\mathbf{b} \mid (A - \mathcal{B}\mathcal{K})\mathbf{b} \mid \cdots \mid (A - \mathcal{B}\mathcal{K})^{n-1} \mathbf{b} \right),$$

$$\Xi(A - \mathcal{B}\mathcal{K}, \beta) = (A - \mathcal{B}\mathcal{K})^n + \beta_{n-1}(A - \mathcal{B}\mathcal{K})^{n-1} + \cdots + \beta_1(A - \mathcal{B}\mathcal{K}) + \beta_0 \mathbf{I}_n,$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{B}\mathcal{K} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ заданный х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A + \mathcal{B}\mathcal{K} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1 \lambda + \beta_0.$$

Лемма 3. Пусть (A, B) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$ и $B = (\mathcal{Z} \mid \mathbf{b})$, тогда для полной управляемости пары матриц $(A - \mathcal{Z}\mathcal{K}, \mathbf{b})$ достаточно, чтобы

$$\mathcal{K} = \Theta \mathcal{Z}_L^\perp (\omega \mathbf{I}_n - A),$$

где \mathcal{Z}_L^\perp – левый делитель нуля максимального ранга матрицы \mathcal{Z} ; Θ – подходящая по размеру матрица полного ранга с произвольными элементами из \mathbb{C} , ω – произвольный скаляр из \mathbb{C} , не совпадающий с вещественными собственными значениями матрицы A , имеющими различную алгебраическую и геометрическую кратности, такие что матрица \mathcal{K} имеет элементы только из поля \mathbb{R} .

Замечания

Замечание 1. Если матрица $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – полного ранга и $n > r$, тогда следующие матрицы обратимы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top \\ \hline \mathbf{B}_L^\perp \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}^+ \\ \hline \mathbf{B}_L^\perp \end{bmatrix}, \quad \left(\mathbf{I}_n \pm \mathbf{B} \Theta \mathbf{B}_L^\perp \right)^{-1} = \mathbf{I}_n \mp \mathbf{B} \Theta \mathbf{B}_L^\perp.$$

Замечание 2. Матрица $\mathcal{Z}_L^\perp (\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ при $\mathcal{Z} = \mathbf{B}$ непосредственно связана с условием управляемости МИМО-системы.

Условие управляемости в частотной области имеет вид (**PBH test**)

$$\forall \lambda \in \text{eig}(\mathbf{A}): \quad \text{rank} \left[\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \right] = n.$$

Выполним невырожденное преобразование

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^+ \\ \hline \mathbf{B}_L^\perp \end{bmatrix} \left[\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^+ (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) & \mathbf{I}_r \\ \hline \mathbf{B}_L^\perp (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) & \mathbf{0} \end{array} \right].$$

Поскольку

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}^+ (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \mid \mathbf{I}_r \right] = r,$$

тогда для управляемости МИМО-системы необходимо и достаточно [Мисриханов М.Ш., 2003]

$$\text{rank } \mathbf{B}_L^\perp (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = n - r.$$

В рассматриваемом случае $\text{rank } \mathfrak{B}_L^\perp (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = n - r - 1$.

Замечание 3. Справедливо тождество х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \left(\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{K}) + \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{K}) \right),$$

$$\mathfrak{K} = \Theta \mathfrak{B}_L^\perp (\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}).$$

Замечание 4. Справедливо тождество передаточных матриц

$$\mathbf{C} (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C} (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\lambda))^{-1} \mathbf{B},$$

$$\mathbf{K}(\lambda) = \Theta(\lambda) \mathbf{B}_L^\perp (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}).$$

Основной результат. Обобщенная формула Аккермана

Теорема 1. Пусть (A, B) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$. Пусть также введено разбиение $B = (\mathcal{B} \mid \mathbf{b})$ и выбрана любая матрица \mathcal{K}' из множества матриц $\mathcal{K}' = \Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A)$, тогда закон обратной связи

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \mathcal{K}' \\ \mathbf{k}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A) \\ \mathbf{k}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

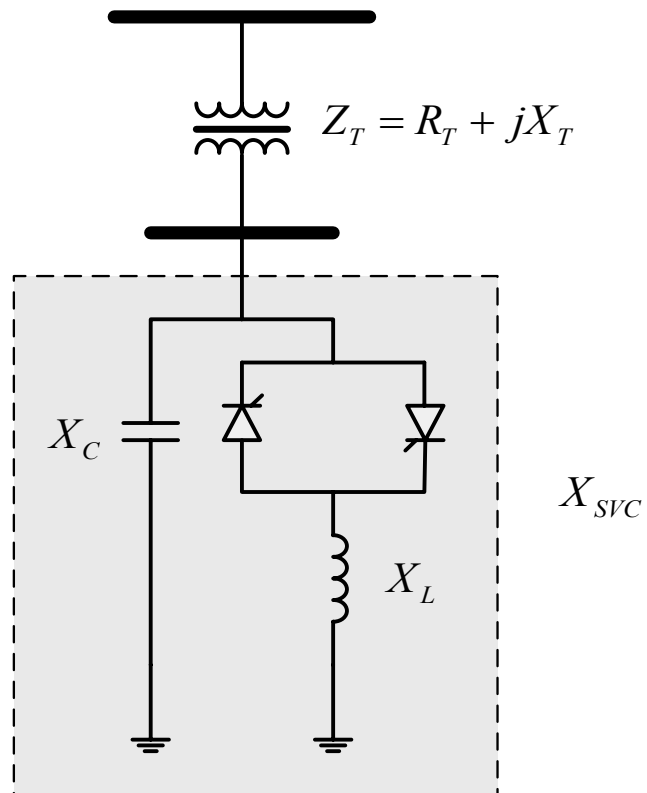
где

$$\mathbf{k}^\top = \mathbf{e}_n^\top \cdot \Omega_e^{-1}(A - \mathcal{B}\mathcal{K}', \mathbf{b}) \cdot \Xi(A - \mathcal{B}\mathcal{K}', \beta),$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{B}\mathcal{K}' - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ заданный х.п. При этом параметризация множества законов обратной связи осуществляется с помощью изменения варианта разбиения матрицы B , варьирования элементов матрицы Θ и скаляра ω .

Пример 1

Задана управляемая ММО-система (идеализированный статический тиристорный компенсатор реактивной мощности SVC 100 МВАр).



В емкостном режиме при демпфировании качаний активной мощности модель SVC имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{z} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1, \quad \text{eig}(\mathbf{A}) = \{1, 1, 1, 1\}.$$

Алгебраическая и геометрическая кратность корней х.п. различна (4 и 3). Требуется найти обратную связь, чтобы в замкнутой ММО-системе реализовать индуктивный режим и обеспечить х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1,$$

$$\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \{-1, -1, -1, -1\}.$$

1. Вычислим матрицу-делитель нуля \mathcal{B}_L^\perp :

$$\mathcal{B}_L^\perp = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -0.2 & -0.6 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

2. Выберем (будем считать, что произвольно):

$$\omega = -1, \quad \Theta = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right].$$

3. Найдем далее по формуле $\mathcal{K}' = \Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ матрицу обратной связи

$$\mathcal{K}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0.4 & 1.4 & 0 & -2 \end{array} \right].$$

В результате получим матрицы

$$A - BK' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0.2 & -1.8 & 2 & 4 \\ \hline -0.4 & -0.4 & 6 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -0.4 & -1.4 & 4 & 3 \end{array} \right],$$

$$\Omega_e(A - BK, \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1.8 & -2.04 & -15.928 \\ \hline 1 & -3.6 & -8.72 & -16.304 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2.6 & -5.72 & -11.304 \end{array} \right].$$

4. Выполняя вычисления по обобщенной формуле Аккермана, получим

$$\mathbf{k}^T = [-7.0066 \mid -16.8996 \mid 25.0996 \mid 15.0332].$$

5. Варьируя матрицу Θ и скаляр ω , находим другие матрицы регулятора, обеспечивающие тот же самый х.п.

$$\omega = -10, \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{Z}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -11 & 0 \\ \hline 2.2 & 6.8 & 0 & -11 \end{array} \right], \\ \mathbf{k}^T = [-1.9583 \mid -6.6286 \mid 14.8286 \mid 9.1302], \end{array} \right.$$

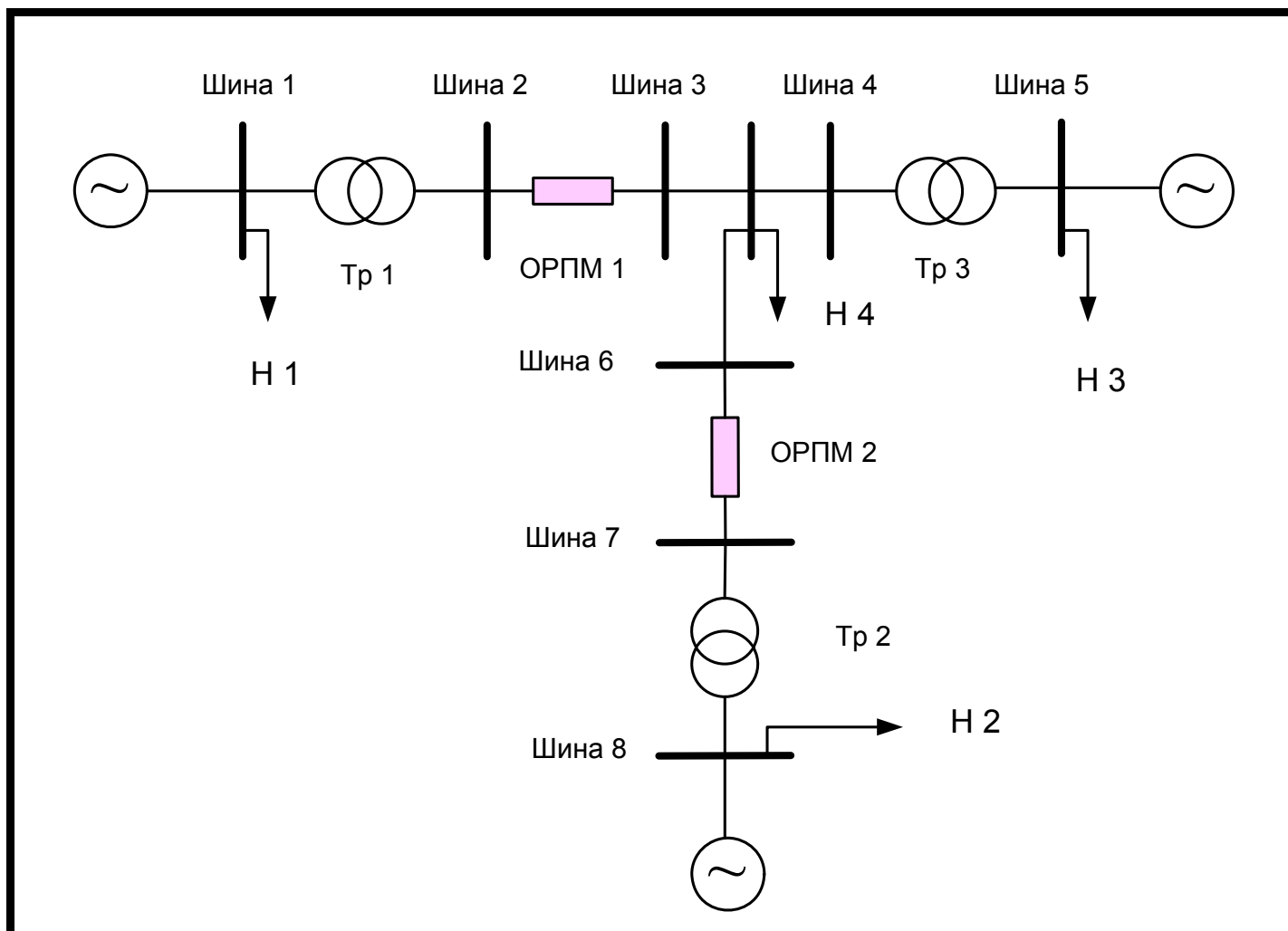
$$\omega = -1, \Theta = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} : \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{Z}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -20 & 0 \\ \hline 4 & 14 & 0 & -20 \end{array} \right], \\ \mathbf{k}^T = [-1.4301 \mid -5.2519 \mid 15.2519 \mid 6.9506], \end{array} \right.$$

$$\omega = -1, \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} : \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{Z}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0.4 & 1.4 & -2 & -2 \\ \hline 0.4 & 1.4 & -4 & -2 \end{array} \right], \\ \mathbf{k}^T = [-11.0797 \mid -60.4481 \mid 69.2481 \mid 75.3985]. \end{array} \right.$$

6. Полагая $\beta = \alpha$, определяем представителя орбиты действия обратной связи

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0.4 & 1.4 & 0 & -2 \\ \hline -0.025 & -0.1764 & 0.3764 & 0.1255 \end{array} \right].$$

Пример 2 (трехмашинная энергосистема с ОРПМ)



ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ

Установленная мощность энергосистемы: 1000 МВА.

Параметры генераторов: $T_{do1} = T_{do2} = 4.49$ с, $T_{do3} = 6$ с, $X_{d1} = X_{d2} = 1.56$ о.е.,
 $X_{d3} = 2$ о.е., $X_{q1} = X_{q2} = 1.06$ о.е.; $X_{q3} = 1.9$ о.е., $X'_{d1} = X'_{d2} = 0,17$ о.е.,
 $X'_{d3} = 0,25$ о.е.

Сопротивления трансформаторов: $X_{T1} = X_{T2} = X_{T3} = j0,305$ о.е.

Сопротивления ВЛ: $X_{Л1} = X_{Л2} = X_{Л3} = j0,25$ о.е.

Ограничения ОРПМ (UPFC) $U_{\max 1} = U_{\max 2} = 0.1U_m$; $U_{\min 1} = U_{\min 2} = -0.1U_m$.

Параметры нагрузок: $L_1 = L_2 = L_3 = 0.05$ о.е., $L_4 = 0.65$ о.е.

Размерность ММО-модели: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{63 \times 63}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{63 \times 21}$.

РЕШАЕМАЯ ЗАДАЧА: обеспечение заданного спектра (заданного х.п.) с помощью ОРПМ (UPFC).

Пример 3 (частичная задача Эрзбергера)

Задана пара (A, \mathcal{B}) .

Требуется с помощью выбора матрицы Θ в $\mathcal{K} = \Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A)$ обеспечить $(A_{\text{зад}}, \mathcal{B}) = (A - \mathcal{B}\mathcal{K}, \mathcal{B})$.

Решение:

$$(A_{\text{зад}}, \mathcal{B}) = (A - \mathcal{B}\mathcal{K}, \mathcal{B}) \Rightarrow A - A_{\text{зад}} = \mathcal{B}\Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A).$$

Осуществляем невырожденное преобразование

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}^+ \\ \mathcal{B}_L^\perp \end{bmatrix} (A - A_{\text{зад}}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^+ \\ \mathcal{B}_L^\perp \end{bmatrix} \mathcal{B}\Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A) = \begin{bmatrix} \Theta \mathcal{B}_L^\perp (\omega I_n - A) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Условия совместности:

$$\mathcal{B}_L^\perp (A - A_{\text{зад}}) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{B}^+ (A - A_{\text{зад}}) (\omega I_n - A)^{-1} \mathcal{B} = \mathbf{0}.$$

Формула решения:

$$\Theta = \mathcal{B}^+ (A - A_{\text{зад}}) (\omega I_n - A)^{-1} (\mathcal{B}_L^\perp)^+.$$

Обобщенная формула Басса-Гура

Теорема 2. Пусть (A, B) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$. Пусть также введено разбиение $B = (\mathcal{Z} \mid \mathbf{b})$ и выбрана любая матрица \mathcal{K}' из множества матриц $\mathcal{K}' = \Theta \mathcal{Z}_L^\perp (\omega I_n - A)$, тогда закон обратной связи

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \mathcal{K}' \\ \mathbf{k}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \Theta \mathcal{Z}_L^\perp (\omega I_n - A) \\ \mathbf{k}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{k} = \left(T \Omega_e^\top (A - \mathcal{Z}\mathcal{K}', \mathbf{b}) \right)^{-1} (\beta - \alpha),$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{Z}\mathcal{K}' - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ заданный х.п. При этом параметризация множества законов обратной связи осуществляется с помощью изменения варианта разбиения матрицы B , варьирования элементов матрицы Θ и скаляра ω .

Обобщенная формула Аккермана для наблюдателя

Теорема 3. Пусть (A, C) – полностью наблюдаемая пара с индексом наблюдаемости $\mu = n - m + 1$. Пусть также введено разбиение

$$C = \begin{bmatrix} e \\ c^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \hline c_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline c_{m-1}^T \\ \hline c_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

и пусть выбрана любая матрица \mathcal{L}' из множества матриц

$$\mathcal{L} = (\omega I_n - A) e_R^\perp \Psi .$$

Тогда закон инъекции выхода

$$\mathbf{v} = -\mathbf{L}\mathbf{y} = -(\mathcal{L}' \mid \mathbf{1})\mathbf{y} = -\left((\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{e}_R^\perp \Psi \mid \mathbf{1} \right)\mathbf{y},$$

где

$$\mathbf{1} = \Xi(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}, \gamma) \cdot \Omega_o^{-1}(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}, \mathbf{c}^\top) \cdot \mathbf{e}_n,$$

$$\Xi(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}, \gamma) = (\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e})^n + \gamma_{n-1}(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e})^{n-1} + \dots + \gamma_1(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}) + \gamma_0\mathbf{I}_n,$$

$$\Omega_o(\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}, \mathbf{c}^\top) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{c}^\top \\ \hline \mathbf{c}^\top (\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e}) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{c}^\top (\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e})^{n-1} \end{array} \right],$$

обеспечивает матрице $\mathbf{A} - \mathcal{L}'\mathbf{e} - \mathbf{1}\mathbf{c}^\top$ заданный х.п.

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathcal{L}'\mathbf{e} + \mathbf{1}\mathbf{c}^\top) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0.$$

Обобщенная формула Басса-Гура для наблюдателя

Теорема 4. Пусть (A, C) – полностью наблюдаемая пара с индексом наблюдаемости $\mu = n - t + 1$. Пусть также введено разбиение $C = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}$ и выбрана любая матрица \mathcal{L}' из множества матриц

$$\mathcal{L} = (\omega \mathbf{I}_n - A) \mathbf{e}_R^\perp \Psi.$$

Тогда закон инъекции выхода

$$\mathbf{v} = -\mathbf{L}\mathbf{y} = -[\mathcal{L} \mid \mathbf{1}]\mathbf{y},$$

где

$$\mathbf{I}^T = (\gamma - \alpha) \left(\Omega_o(A - \mathcal{L}\mathbf{e}, \mathbf{c}^T) \mathbf{T}^T \right)^{-1},$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{L}'\mathbf{e} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ заданный х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A + \mathcal{L}'\mathbf{e} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0.$$

Дальнейшие исследования

1. Решение дополнительных задач (оптимизация, робастность).
2. Обобщение формулы А.Н. Крылова на МІМО-системы.
3. Повышение точности рекурсивного алгоритма для больших МІМО-систем ($n \gg 1$, $r \gg 1$, $m \gg 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kailath T.* Linear systems. Prentice Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1980.
2. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
3. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
4. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
5. *Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P.* Robust pole assignment in linear state feedback // Int. J. Control. 1985. V. 41. No 5. P. 1129 – 1155.
6. *Nordström K., Norlander H.* On the multi input pole placement control problem // Proc. 36 IEEE Conf. Decision and Control. 1997. V. 5. P. 4288 – 4293.
7. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
8. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Минимальная параметризация решений линейных матричных уравнений // Современные методы управления многосвязными динамическими системами / Под ред. А.А. Красовского. Вып. 2. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 191 – 202.
9. *Мисриханов М.Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука. 2007.
10. *Мисриханов М.Ш.* Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // АиТ. № 12. 2005. С. 93 – 104.
11. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // АиТ. № 12. 2007 (в печати).
12. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем // АиТ, 2006. № 5. С. 119 – 132.