НОВЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Б.Т. Поляк, М.В. Топунов

Институт проблем управления РАН, Москва

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 u + D_1 w,\\
y &= C_1 x + D_2 w,\\
z &= C_2 x + B_2 u,
\end{aligned}
$$

x — состояние, y — наблюдаемый выход, z — управляемый выход, w — внешние возмущения, неслучайные, ограниченные: $\|w(t)\| \leqslant 1$.

Управление: $u = Kx$ (обратная связь по состоянию)

$u = K\widehat{x}$, $\widehat{x}$ — наблюдатель (обратная связь по выходу)

Задачи:

1. анализ (нет управления):

   а) оценить $\{x\}$ или $\{z\}$ сверху;

   б) фильтрация: оценить $e = x - \widehat{x}$.

2. синтез: $u = Kx$ или $u = K\widehat{x}$, минимизировать z.

Основная техника

A) Инвариантные эллипсоиды

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\}, \quad P > 0,$$

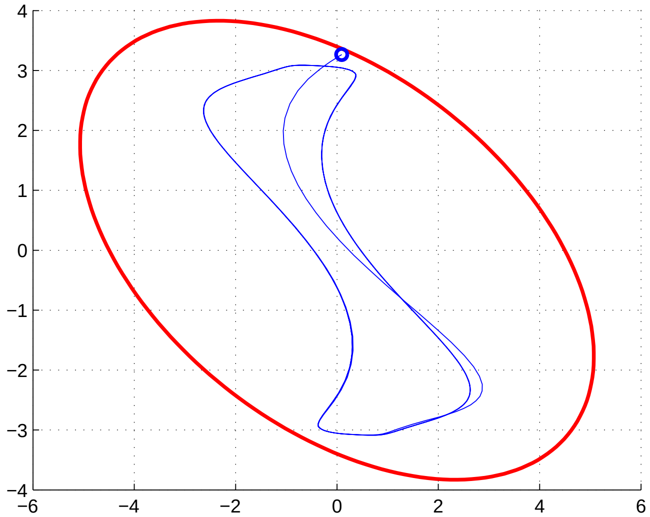
называется инвариантным по переменной x (по состоянию), если:

1) из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех $t \geqslant 0$;

2) при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ будет $x(t) \to \mathcal{E}_x$, $t \to \infty$ (при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$).

Если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид, то выход $z = Cx$ при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : \; z^{\mathrm{T}}(CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\}$, а при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ стремится к нему. Его будем называть ограничивающим по выходу.

Частный случай скалярного выхода z: $\min \max |z|$.



Б) Линейные матричные неравенства (LMI)

(Boyd, Чурилов, Коган)

$A_0 + \sum x_i A_i \leqslant 0$, $A_i = A_i^{\mathrm{T}}$ — матрицы, x_i — скалярные переменные;

$AP + PA^{\mathrm{T}} \leqslant 0$ (неравенство Ляпунова), P — матричная переменная.

Мощные методы решения: YALMIP, SeDuMi, cvx

Новое

1. Ограниченные помехи

2. Непрерывный и дискретный случай

3. Разнообразные задачи (ограничения на x, на начальные условия, на управление и т.п.)

4. Робастный вариант

5. Техника (S-теорема с двумя ограничениями)

Литература

Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.

Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. №3. С. 106–125.

Чурилов А.Н., Гессен А.В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады РАН. 2008.

Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007.

Литература (продолжение)

Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика (в печати)

Топунов М.В., Щербаков П.С. Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика (в печати).

Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique // IFAC WC 2008.

Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Extensions of Petersen's Lemma on Matrix Uncertainty // IFAC WC 2008.

Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Invariant Ellipsoids Approach to Robust Rejection of Persistent Disturbances // IFAC WC 2008.

I. Управление по состоянию. Анализ

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Dw, \quad \|w\| \leqslant 1,\\
z &= Cx,
\end{aligned}
$$

A гурвицева, пара (A, D) управляема, C — матрица макс. ранга.

Теорема 1. Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ является инвариантным по состоянию для непрерывной динамической системы с L_∞-ограниченными внешними возмущениями тогда и только тогда, когда матрица P удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$
AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0,
$$

при некотором $\alpha > 0$.

Набросок доказательства

Введем квадратичную функцию Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} Q x$, $Q > 0$, построенную на решениях системы. Тогда

$$\dot{V}(x) = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} Q + QA)x + 2w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q x.$$

Чтобы траектории $x(t)$ системы не выходили за границу эллипсоида $\mathcal{E}_x$, потребуем при $V(x) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1$ выполнения $\dot{V}(x) \leqslant 0$, т. е. чтобы

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} Q + QA)x + 2w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q x \leqslant 0, \quad \forall (x, w): \quad x^{\mathrm{T}} Q x \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1.$$

В силу неущербности S-процедуры с двумя ограничениями, полученное неравенство эквивалентно LMI

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q + QA + \tau_1 Q & QD \\ D^{\mathrm{T}} Q & -\tau_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0$$

при некоторых значениях τ_1, τ_2 таких, что $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant 0$.

По формуле Шура, неравенство перепишется в виде

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \tau_1 Q + \frac{1}{\tau_2} QDD^{\mathrm{T}}Q \leqslant 0.$$

Обозначив $P = Q^{-1}$ и умножив полученное неравенство слева и справа на P, получаем

$$PA^{\mathrm{T}} + AP + \tau_1 P + \frac{1}{\tau_2} DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0.$$

Итак, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P > 0$ эквивалентно выполнению последнего линейного матричного неравенства при некоторых $\tau_1 \geqslant \tau_2 > 0$. Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, то $\tau_2 = \tau_{2\max} = \tau_1$. Переобозначив $\tau_1 = \alpha$, получаем искомое неравенство. Теорема доказана.

Дискретная система. Управление по состоянию. Анализ

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \quad \|w_k\| \leqslant 1,\\
z_k &= Cx_k,
\end{aligned}
$$

A шуровская, пара (A, D) управляема, C — матрица макс. ранга.

Теорема 1а. Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ вида является инвариантным для дискретной динамической системы с l_∞-ограниченными внешними возмущениями тогда и только тогда, когда матрица P удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$
\frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0,
$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$.

Набросок доказательства

Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x_k) = x_k^{\mathrm{T}} Q x_k, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях системы. Чтобы траектории x_k системы не выходили за границу эллипсоида $\mathcal{E}_x$ потребуем при $V(x_k) \leqslant 1$ и $w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1$ выполнения $V(x_{k+1}) \leqslant 1$, т. е.

$$(Ax_k + Dw_k)^{\mathrm{T}} Q (Ax_k + Dw_k) \leqslant 1, \quad \forall (x_k, w_k): \; x_k^{\mathrm{T}} Q x_k \leqslant 1, \; w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1.$$

В силу неущербности S-процедуры с двумя ограничениями, полученное условие эквивалентно LMI

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q A - \tau_1 Q & A^{\mathrm{T}} Q D \\ D^{\mathrm{T}} Q A & D^{\mathrm{T}} Q D - \tau_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0$$

при некоторых значениях $\tau_1, \tau_2 \geqslant 0$ таких, что $\tau_1 + \tau_2 \leqslant 1$.

С использованием формулы Шура неравенство перепишется в виде

$$A^{\mathrm{T}}QA - \tau_1 Q \leqslant A^{\mathrm{T}}QD\big(D^{\mathrm{T}}QD - \tau_2 I\big)^{-1}D^{\mathrm{T}}QA.$$

Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, т. е. с наибольшей матрицей Q, но должно быть $D^{\mathrm{T}}QD - \tau_2 I < 0$, то

$$\tau_2 = \tau_{2\max} = 1 - \tau_1.$$

В соответствии с леммой об обращении матриц

$$\big(Q^{-1} - (1-\tau_1)^{-1}DD^{\mathrm{T}}\big)^{-1} = Q + QD\big((1-\tau_1)I - D^{\mathrm{T}}QD\big)^{-1}D^{\mathrm{T}}Q$$

полученное неравенство можно переписать как

$$P \geqslant \tau_1^{-1}APA^{\mathrm{T}} + (1-\tau_1)^{-1}DD^{\mathrm{T}}, \quad P = Q^{-1}.$$

Переобозначив $\tau_1 = \alpha$, получим искомое.

При условии $V(x_k) \geqslant 1$ потребуем, чтобы $V(x_{k+1}) \leqslant V(x_k)$. Тогда придем к тем же неравенствам. Теорема доказана.

Замечания

Для инвариантного эллипсоида мы можем учитывать неопределенность в начальном состоянии

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \left\{x : \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P_0 > 0,$$

требуя, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_x$, т. е.

$$P \geqslant P_0.$$

В качестве целевой функции рассмотрим критерий следа

$$f(P) = \mathrm{tr}\left[CPC^{\mathrm{T}}\right],$$

который соответствует сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида по выходу исходной системы. Возможны и другие критерии оптимальности; например, можно минимизировать норму y. Заметим, что в случае скалярного выхода, ограничивающий эллипсоид — просто отрезок.

Следствие 1

Минимальный по критерию $f(P)$ инвариантный эллипсоид рассматриваемой системы при $\mathcal{E}_0 = \{0\}$ принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $P(\alpha)$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} = 0$$

на интервале $0 < \alpha < -2\max\limits_i \mathrm{Re}\,\lambda_i(A)$, где $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A.

При этом функция $\varphi(\alpha) = \mathrm{tr}\big[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\big]$ строго выпукла на указанном интервале.

II. Фильтрация

— при случайных возмущениях задача решается фильтром Калмана.

— мы строим гарантированные а не вероятностные оценки состояний, а именно:

— рассматриваются стационарные задачи

— ищется оценка состояния такая, что ее ошибка заключена в единый (инвариантный) эллипсоид, т.е. оценка является равномерной

— фильтр ищется в классе линейных стационарных фильтров.

Фильтрация. Продолжение

В этом суженном классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т.е. удается построить оптимальный фильтр и оценку состояния.

Подход, основанный на построении гарантированных (а не вероятностных) оценок состояний был предложен в работах Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе. В работах Куржанского и Черноусько была развита эллипсоидальная техника фильтрации. Однако данная постановка задачи отличается от упомянутых выше; там рассматривались более общие модели, получаемое решение было лишь субоптимальным, а равномерность оценок не имела места.

Фильтрация. Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + D_1 w, \\ y = Cx + D_2 w, \end{cases}$$

$w \in \mathbb{R}^m$ — ограниченное в норме внешнее возмущение. Пара (A, D_1) управляема, а $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$. Состояние x системы недоступно измерению; информация о системе предоставляется выходом y.

Построим фильтр со структурой наблюдателя Люенбергера, описываемый уравнением

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + F(y - C\widehat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times l}.$$

относительно оценки состояния $\widehat{x}$.

Невязка $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ характеризует точность фильтрации. Она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC)e + (D_1 - FD_2)w. \tag{1}$$

Задача — найти минимальный эллипсоид, содержащий невязку e.

Эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n : \quad e^{\mathrm{T}} P^{-1} e \leqslant 1\}, \quad P > 0,$$

называется инвариантным для системы (1), если: 1) из условия $e(0) \in \mathcal{E}$ (малые уклонения) следует $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$; 2) при $e(0) \notin \mathcal{E}$ (большие уклонения) будет $e(t) \to \mathcal{E}, t \to \infty$ (при этом, возможно, $e(t) \in \mathcal{E}$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$). Итак, мы оцениваем асимптотическую (а при малых уклонениях и равномерную по t) точность фильтрации.

Теорема 2

Решение $\widehat{Q}$ и $\widehat{Y}$ задачи минимизации $\operatorname{tr} H \to \min$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}Q + QA - YC - C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ (QD_1 - YD_2)^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{3}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q = Q^{\mathrm{T}}$, Y и $H = H^{\mathrm{T}}$ и числовому параметру $\alpha > 0$, определяет матрицу $\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}$ минимального инвариантного эллипсоида, а также соответствующую этому эллипсоиду матрицу фильтра

$$\widehat{F} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{Y}.$$

Набросок доказательства

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V(e) = e^{\mathrm{T}}Qe,\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q > 0$, построенную на решениях уравнения (1). Тогда

$$\dot V(e) = \big((A - FC)e + (D_1 - FD_2)w\big)^{\mathrm{T}}Qe + e^{\mathrm{T}}Q\big((A - FC)e+$$
$$+(D_1 - FD_2)w\big) = e^{\mathrm{T}}\big((A - FC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A - FC)\big)e + 2e^{\mathrm{T}}Q(D_1 - FD_2)w.$$

Чтобы траектории системы (1) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}$ при $e(0) \in \mathcal{E}$, потребуем, чтобы при $V(e) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$ выполнялось $\dot V(e) \leqslant 0$, (это же условие гарантирует, что $V(e)$ монотонно убывает при $V(e) \geqslant 1$, т.е. выполняется и второе свойство инвариантного эллипсоида). Итак

$$e^{\mathrm{T}}\big((A - FC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A - FC)\big)e + 2w^{\mathrm{T}}(D_1 - FD_2)^{\mathrm{T}}Qe \leqslant 0,$$
$$\forall (e, w):\quad e^{\mathrm{T}}Qe \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1. \qquad (4)$$

Применим теперь S-теорему для двух квадратичных форм, тогда

(4) эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} (A-FC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A-FC) + \alpha Q & Q(D_1 - FD_2) \\ (D_1 - FD_2)^{\mathrm{T}}Q & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0$$

при некоторых значениях α, β таких, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$.

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P = Q^{-1} > 0$ эквивалентно выполнению последнего матричного неравенства при некоторых $\alpha \geqslant \beta > 0$. Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, то $\beta = \beta_{\max} = \alpha$.

Вводя матричную переменную $Y = QF$, исключая F, приходим к (2). Чтобы свести задачу минимизации $\operatorname{tr} Q^{-1}$ к линейной, введем матрицу $H = H^{\mathrm{T}}$, такую, что $Q^{-1} \leqslant H$; последнее неравенство эквивалентно (3). В результате мы пришли к задаче минимизации $\operatorname{tr} H \to \min$ при ограничениях (2), (3). Теорема доказана.

Замечания

Отметим, что при фиксированном α данная задача сводится к минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой линейные матричные неравенства, т. е. к задаче полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming, SDP*), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации.

Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности, SeDuMi Toolbox, YALMIP Toolbox, а также LMI Toolbox системы Matlab.

Одномерная минимизация по α всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта остается открытой задачей.

Возможные обобщения

1. Если мы обладаем априорной информацией о начальном состоянии системы $x(0) \in E_0 = \{x : x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\}$, то, выбирая $\widehat{x}(0) = 0$ мы можем гарантировать, что $e(0) \in E_0$. Если потребовать, чтобы $E_0 \subset \mathcal{E}$, то мы гарантируем, что $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех t. Итак, если к системе LMI в теореме 2 добавить еще одно $Q \leqslant P_0^{-1}$, то мы получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности фильтрации.

2. Пусть нам нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния x, а лишь некоторых. Пусть имеется выход $y_1 = C_1 x$ (например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки $e_1 = y_1 - \widehat{y}_1 = C_1(x - \widehat{x})$ возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации $\operatorname{tr} C_1 P C_1^{\mathrm{T}}$ вместо $\operatorname{tr} P$, что легко может быть записано в форме, аналогичной теореме 2.

3. Отметим также, что можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, мы можем минимизировать L_∞-норму невязки, т.е. радиус шара, содержащего эллипсоид $\mathcal{E}$. Для этого потребуем $r \to \max$ при дополнительном ограничении $Q \geqslant rI$.

4. Наконец, можно рассмотреть робастные варианты задачи, когда описание системы содержит неопределенности (т.е. матрицы A, D включают ограниченные неопределенности). Проблема заключается в построении фильтра и гарантированных оценок его точности, справедливых при любых допустимых неопределенностях. Эта задача разрешима с использованием той же техники, что и выше.

Пример

Рассмотрим задачу оценивания состояния линеаризованного двойного маятника, движущегося в вязкой среде. Вектор состояния системы выберем в форме $x = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} & x_2^{\mathrm{T}} & v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, где x_1, x_2 — координаты "верхнего" и "нижнего" грузика, а v_1, v_2 — их скорости. Пусть наблюдаемый выход системы имеет вид $y = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} & x_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а минимизируемый выход равен $y_1 = \begin{pmatrix} v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Будем полагать, что на скорость нижнего грузика влияет внешнее возмущение w.

При единичных параметрах системы и коэффициенте сопротивлении среды 0.2 получаем линейные уравнения движения. Полагая $P_0 = 0.01I$, решая задачу SDP и минимизируя по α находим матрицы фильтра $\widehat{F}$ и инвариантного эллипсоида $\widehat{P}$, обеспечивающего минимум эллипса, содержащего невязку e_1.

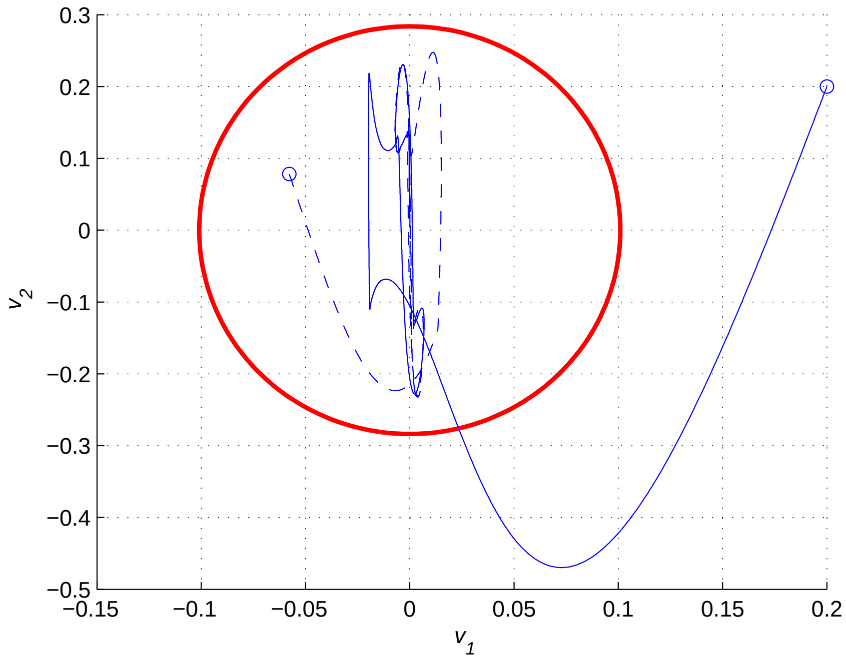


Рис. 1: Оценка (эллипс) и траектории невязок.

На рис. 1 изображен эллипс, а также две траектории $e_1(t)$ (для больших и малых уклонений). В качестве возмущения выбиралось локально наихудшее — то возмущение, которое максимизирует $\dot{V}(e)$ при заданном e. Оно задается формулой $w^* = D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}e/\|D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}e\|$.

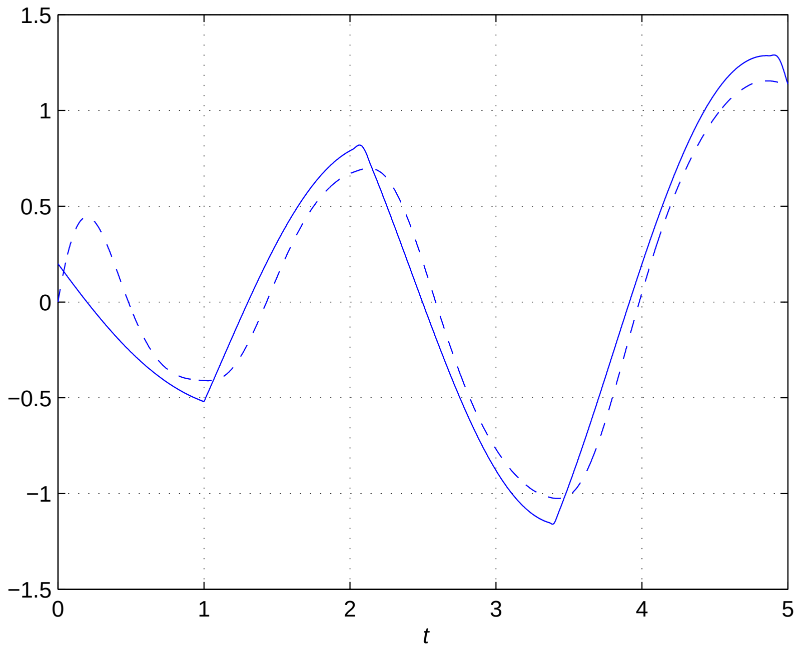


Рис. 2: Фильтрация координаты v_2.

На рис. 2 показаны траектории $v_2(t)$ (сплошной линией) и $\widehat{v}_2(t)$ (пунктиром). Видно, что точность фильтрации весьма высока (для координаты $v_1(t)$ она еще выше).

Задача фильтрации. Робастный вариант

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big(A + \Delta A(t)\big)x + \big(D_1 + \Delta D_1(t)\big)w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \tag{5}$$

где $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешние возмущения, $\|w(t)\| \leqslant 1, \ \forall t \geqslant 0$, а

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta D_1(t) = F_{D_1} \Delta_{D_1}(t) H_{D_1}, \tag{6}$$

где F_A, F_{D_1}, H_A, H_{D_1} — постоянные матрицы, а

$$\|\Delta(t)\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta(t)\|_F \leqslant 1 \quad \forall t \geqslant 0.$$

Матрица A гурвицева — действительные части ее собственных значений отрицательны, пара (A, D_1) управляема, а C — матрица максимального ранга; кроме того, будем полагать, что $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Построим фильтр со структурой наблюдателя Люенбергера, описываемый уравнением

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + F(y - C\widehat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}, \tag{7}$$

относительно оценки состояния $\widehat{x}$. Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица F.

Введем в рассмотрение невязку $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, она характеризует собой точность фильтрации; согласно (5), (7), она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC)e + \Delta Ax + (D_1 + \Delta D_1 - FD_2)w.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + (D_1 + \Delta D_1)w, \\ \dot{e} = \Delta Ax + (A - FC)e + (D_1 + \Delta D_1 - FD_2)w. \end{cases}$$

Цель — нахождение минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку e. Пусть $g = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + \Delta A & 0 \\ \Delta A & A - FC \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 + \Delta D_1 \\ D_1 + \Delta D_1 - FD_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w.$$

Заключим g в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид, порожденный матрицей P_2.

Теорема 3

Решение $\widehat{Q}_2$ и $\widehat{Y}$ задачи минимизации $\operatorname{tr} H \to \min$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ 0 & \Psi_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_1 & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^{\mathrm{T}} H_{D_1} & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} Q_1 & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_1 & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где

$$\Psi_1 = A^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A, \ \Psi_2 = A^{\mathrm{T}} Q_2 + Q_2 A - Y C - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2,$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}}$, Y и $H = H^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и числовому параметру $\alpha > 0$, определяет матрицу $\widehat{P}_2 = \widehat{Q}_2^{-1}$ минимального ограничивающего эллипсоида, а также соответствующую матрицу наблюдателя $\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1} \widehat{Y}$.

Лемма Питерсена

Рассмотрим $G \in \mathbb{S}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $M, N \neq 0$.

Неравенство

$$G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

выполняется для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\|\Delta\| \leqslant 1$, тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$G + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N \leqslant 0.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — спектральная норма; $G \leqslant 0$ означает отрицательную полуопределенность матрицы.

Petersen I., A stabilization algorithm for a class of uncertain systems, *Syst. Control Lett.*, 1987, **8**, 351–357.

Доказательство леммы Питерсена

Пусть

$$G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

для всех $\|\Delta\| \leqslant 1$. Это эквивалентно выполнению

$$x^{\mathrm{T}}Gx + 2x^{\mathrm{T}}M\Delta Nx \leqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\|\Delta\| \leqslant 1$.

Положим $x^{\mathrm{T}}M\Delta \doteq y^{\mathrm{T}}$. Тогда предыдущее условие запишется как

$$x^{\mathrm{T}}Gx + 2y^{\mathrm{T}}Nx \leqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^q$ таких, что

$$y^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}M\Delta\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}x \leqslant x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x.$$

Используя S-процедуру с одним ограничением, заключаем, что выполнение полученного условия эквивалентно существованию $\varepsilon \geqslant 0$ такого, что

$$\begin{pmatrix} G+\varepsilon MM^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или, ограничиваясь $\varepsilon > 0$ и применяя лемму Шура,

$$G+\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N \leqslant 0.$$

Лемма доказана.

Несколько неопределенностей: только достаточность

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^{\mathrm{T}} \Delta_i^{\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}}) \leqslant 0 \quad \forall\ \|\Delta_i\| \leqslant 1$$

$$?? \Updownarrow ??$$

$$\exists\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell > 0: \quad G + \sum_{i=1}^{\ell} \Big(\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i \Big) \leqslant 0$$

———————————

Mao, W.-J., Chu, J., *IEEE TAC*, 2003, **48**, 6, 1007–1012.

Mao, W.-J., Chu, J., *IEEE TAC*, 2006, **51**, 8, 1404–1405.

III. Управление по состоянию. Синтез

$$\dot{x} = Ax + B_1u + Dw,$$
$$y = Cx + B_2u,$$

$w \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, $\|w\| \leqslant 1$. Матрица A не предполагается гурвицевой, (A, B_1) управляема, а также $B_2^{\mathrm{T}}C = 0$.

Цель — найти регулятор K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx,$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа инвариантного эллипсоида выхода) подавляет воздействие внешних возмущений $w(t)$.

Теорема 4

Задача синтеза статического регулятора по состоянию, оптимально (в смысле следа инвариантного эллипсоида по выходу) подавляющего внешние возмущения, эквивалентна задаче минимизации

$$\operatorname{tr}\left[CPC^{\mathrm{T}} + B_2 Z B_2^{\mathrm{T}}\right] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1 Y + Y^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad \alpha > 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad P \geqslant P_0,$$

где $Y = KP$, а минимизация проводится по переменным $\alpha \in \mathbb{R}$, $P = P^{\mathrm{T}}$, Y и $Z = Z^{\mathrm{T}}$.

Замечания

1. При фиксированном α данная задача сводится к задаче полуопределенного программирования (SDP), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации. Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности, SeDuMi и YALMIP на базе системы Matlab.

2. Оптимальный регулятор задается соотношением

$$K = Y(\alpha^*)P^{-1}(\alpha^*).$$

Ограничение на управление

Пусть P — матрица инвариантного эллипсоида по состоянию для линейной системы с управлением вида $u = Kx$. Пусть также

$$Y = KP.$$

Тогда ограничение

$$\|u(t)\| \leqslant \mu$$

эквивалентно выполнению следующего LMI для матриц P и Y:

$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Ограничения на фазовые переменные

$$x(t) \in \mathcal{E}_0 = \{x : x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\},$$

$$P \geqslant P_0.$$

Управление по состоянию. Робастный случай. Анализ

$$\dot{x} = \big(A + \Delta A(t)\big)x + \big(D + \Delta D(t)\big)w,$$
$$y = Cx,$$

$w \in \mathbb{R}^m$ — внешние возмущения, $\|w(t)\| \leqslant 1$,
$\Delta A(t), \Delta D(t)$ — системные неопределенности:

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta D(t) = F_D \Delta_D(t) H_D,$$

$\Delta_A(t), \Delta_D(t)$ — матричные неопред-ти, ограниченные в норме:

$$\|\Delta(t)\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta(t)\|_F \leqslant 1 \quad \forall t \geqslant 0.$$

Система устойчива (A гурвицева), пара (A, D) управляема, C — матрица полного ранга.

Теорема 5

Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ является инвариантным по состоянию, если матрица P удовлетворяет LMI

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 F_D F_D^{\mathrm{T}} & D & PH_A^{\mathrm{T}} & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & H_D^{\mathrm{T}} \\ H_A P & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & H_D & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad P \geqslant P_0,$$

при некоторых $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Следствие 2. Задача о нахождении минимального по критерию следа инвариантного эллипсоида свелась к задаче одномерной минимизации по параметру α при линейных матричных ограничениях по переменным $P = P^{\mathrm{T}}$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Управление по состоянию. Робастный случай. Синтез

$$\dot{x} = \big(A + \Delta A(t)\big)x + \big(B_1 + \Delta B_1(t)\big)u + \big(D + \Delta D(t)\big)w,$$
$$y = Cx + B_2 u,$$

$w \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, $\|w\| \leqslant 1$,
$\Delta A(t), \Delta B_1(t), \Delta D(t)$ — системные неопределенности:

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \ \Delta B_1(t) = F_{B_1} \Delta_{B_1}(t) H_{B_1}, \ \Delta D(t) = F_D \Delta_D(t) H_D,$$

$\Delta_A(t)$, $\Delta_{B_1}(t)$, $\Delta_D(t)$ — матричные неопр-сти: $\|\Delta\|_{(F)} \leqslant 1$.

Матрица A не предполагается гурвицевой, пара (A, B_1) управляема. Цель — найти регулятор $u = Kx$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию, который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений при всех неопределенностях.

Теорема 6

Решение $\widehat{P}$ и $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$ задачи минимизации $\mathrm{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}H_{B_1}^{\mathrm{T}} & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & 0 & H_D^{\mathrm{T}} \\ H_AP & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ H_{B_1}Y & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & H_D & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\Omega = AP + PA^{\mathrm{T}} + B_1Y + Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + \alpha P + \varepsilon_1 F_AF_A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 F_{B_1}F_{B_1}^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 F_DF_D^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y = KP, \quad P \geqslant P_0, \quad \alpha > 0,$$

по переменным $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}$, $P = P^{\mathrm{T}}$, Y и $Z = Z^{\mathrm{T}}$, доставляет соответственно инвариантный эллипсоид и статический регулятор по состоянию для рассматриваемой линейной непрерывной управляемой системы, оптимально подавляющий внешние возмущения.

Наихудшие возмущения и неопределенности

В процессе доказательства теоремы 6 мы строим функцию Ляпунова $V(x)$ для замкнутой системы, такую, что $\dot V(x) \leqslant 0$ при $V(x) \geqslant 1$. Естественно задаться целью найти внешнее возмущение $\widetilde w(t)$ и матричные неопределенности $\widetilde\Delta_A(t)$, $\widetilde\Delta_{B_1}(t)$ и $\widetilde\Delta_D(t)$, максимизирующие $\dot V(x)$.

Лемма. Для линейной непрерывной управляемой системы, где матричные неопределенности ограничены во фробениусовой норме, внешнее возмущение $\widetilde w(t)$ задается формулой

$$\widetilde w(t) = \frac{\big(D + F_D\Delta_D(t)H_D\big)^{\mathrm T}\widehat P^{-1}x(t)}{\Big\|\big(D + F_D\Delta_D(t)H_D\big)^{\mathrm T}\widehat P^{-1}x(t)\Big\|};$$

в частности, если внешнее возмущение одномерно, то

$$\widetilde w(t) = \operatorname{sign}\big(D + F_D\Delta_D(t)H_D\big)^{\mathrm T}\widehat P^{-1}x(t).$$

Матричные неопределенности $\widetilde{\Delta}_A(t)$, $\widetilde{\Delta}_{B_1}(t)$ и $\widetilde{\Delta}_D(t)$ задаются формулами

$$\widetilde{\Delta}_A(t) = \frac{F_A^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) H_A^{\mathrm{T}}}{\left\| F_A^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) H_A^{\mathrm{T}} \right\|_F},$$

$$\widetilde{\Delta}_{B_1}(t) = \frac{F_{B_1}^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) \left(H_{B_1} \widehat{K}\right)^{\mathrm{T}}}{\left\| F_{B_1}^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) \left(H_{B_1} \widehat{K}\right)^{\mathrm{T}} \right\|_F},$$

$$\widetilde{\Delta}_D(t) = \frac{F_D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) w^{\mathrm{T}}(t) H_D^{\mathrm{T}}}{\left\| F_D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) w^{\mathrm{T}}(t) H_D^{\mathrm{T}} \right\|_F}.$$

Если матричные неопределенности одномерны, то

$$\widetilde{\Delta}_A(t) = \operatorname{sign} F_A^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) H_A^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\Delta}_{B_1}(t) = \operatorname{sign} F_{B_1}^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) x^{\mathrm{T}}(t) \left(H_{B_1} \widehat{K}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\Delta}_D(t) = \operatorname{sign} F_D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t) w^{\mathrm{T}}(t) H_D^{\mathrm{T}}.$$

Управление по выходу

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + B_1 u + D_1 w, \\
y = C_1 x + D_2 w, \\
z = C_2 x + B_2 u,
\end{cases}
$$

где w — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени: $\|w(t)\| \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$. Матрица A не предполагается устойчивой, пара (A, B_1) управляема, $B_2^{\mathrm{T}} C_2 = 0$, а также $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y.

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C_1 \widehat{x}$:

$$
\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + B_1 u + F(y - C_1 \widehat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times l}.
$$

Введем в рассмотрение *невязку* $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$; она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC_1)e + (D_1 - FD_2)w.$$

Таким образом, при построении обратной связи с помощью динамического регулятора $u = K\widehat{x}$ приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + B_1 K)\widehat{x} + FC_1 e + FD_2 w, \\ \dot{e} = (A - FC_1)e + (D_1 - FD_2)w. \end{cases}$$

Обратимся к задаче минимизации выхода z:

$$z = C_2 x + B_2 u = C_2(\widehat{x} + e) + B_2 K\widehat{x} = (C_2 + B_2 K)\widehat{x} + C_2 e = \mathcal{C} g,$$

где

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2 K & C_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ e \end{pmatrix}.$$

При этом вектор g является решением дифференциального уравнения

$$\dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + B_1 K & FC_1 \\ 0 & A - FC_1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} FD_2 \\ D_1 - FD_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w.$$

Заключим g в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид по выходу z, порожденный матрицей $\mathcal{C} P \mathcal{C}^{\mathrm{T}}$.

Теорема 7

Решение $\widehat{P}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Y}_1$ и $\widehat{Y}_2$ задачи минимизации

$$\mathrm{tr}[C_2(P_1+H)C_2^{\mathrm{T}}+B_2Z_1B_2^{\mathrm{T}}] \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} Z+\frac{1}{\alpha}R & Y_2C_1-\frac{1}{\alpha}R & 0 \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\alpha}R & A^{\mathrm{T}}Q_2+Q_2A-Y_2C_1-C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}+\alpha Q_2+\frac{1}{\alpha}R & Q_2D_1 \\ 0 & D_1^{\mathrm{T}}Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2Q_2+Z & I \\ I & -(AP_1+P_1A^{\mathrm{T}}+B_1Y_1+Y_1^{\mathrm{T}}{B_1}^{\mathrm{T}}+\alpha P_1) \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} R & Y_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P_1 = P_1^{\mathrm{T}}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}}$, Y_1, Y_2, $Z = Z^{\mathrm{T}}$, $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}}$, $R = R^{\mathrm{T}}$, $H = H^{\mathrm{T}}$ и числовом параметре $\alpha \in \mathbb{R}$, определяет матрицу $\widehat{\mathcal{C}}\widehat{P}\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{T}}$ ограничивающего эллипсоида по оптимизируемому выходу системы, где

$$\widehat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2\widehat{K} & C_2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{Q}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

а также соответствующие этому инвариантному эллипсоиду динамический регулятор

$$\widehat{K} = \widehat{Y}_1 \widehat{P}_1^{-1}$$

и матрицу наблюдателя

$$\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1} \widehat{Y}_2.$$

Управление двойным осциллятором

Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи управления двойным осциллятором, т. е. системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 3).

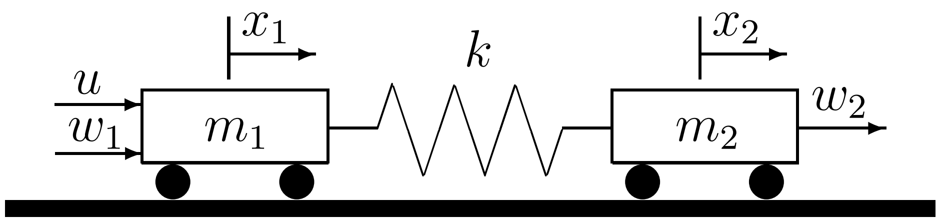


Рис. 3: Двойной осциллятор.

Управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad \|w(t)\| \leqslant 1$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело.

Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$$

вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы.

В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + w_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а в качестве минимизируемого выхода системы возьмем вектор

$$z = \begin{pmatrix} u & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2.$$

При единичных значениях параметров с помощью теоремы 7 был определен оптимальный регулятор $\widehat{K}$ и матрица наблюдателя $\widehat{F}$, обеспечивающей минимум (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида по выходу.

Для численного решения задачи полуопределенного программирования мы использовали SeDuMi Toolbox и YALMIP Toolbox на базе системы MATLAB. В результате,

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -1.5925 & 0.2679 & -1.9023 & -1.3278 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{F} \approx \begin{pmatrix} 1.3747 & 0.0822 \\ 0.2346 & 1.1966 \\ 1.1805 & 0.1155 \\ 0.3140 & 0.5991 \end{pmatrix}.$$

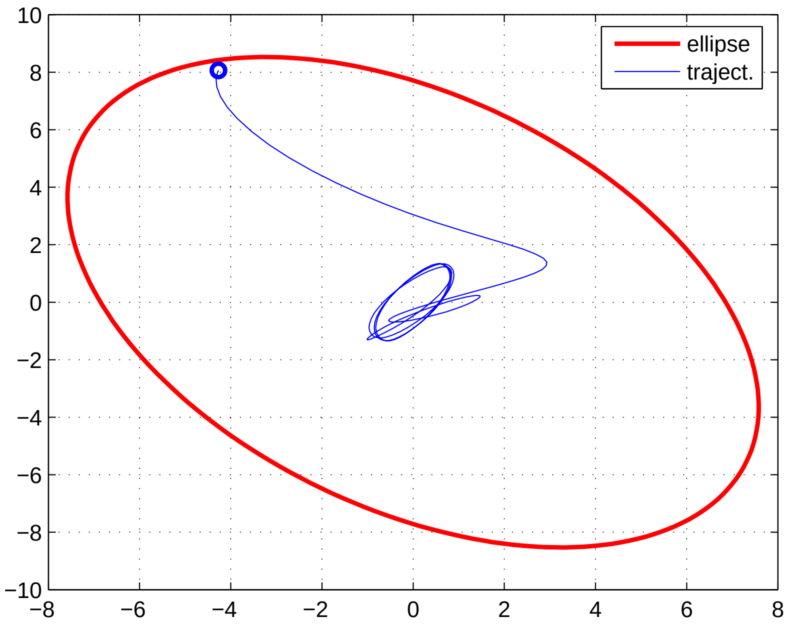


Рис. 4: Ограничивающий эллипсоид по выходу.

На рис. 4 изображен минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу. На том же рисунке показана траектория $z(t)$ при некотором выборе начального положения внутри этого эллипсоида и внешних возмущениях $w^*(t)$.

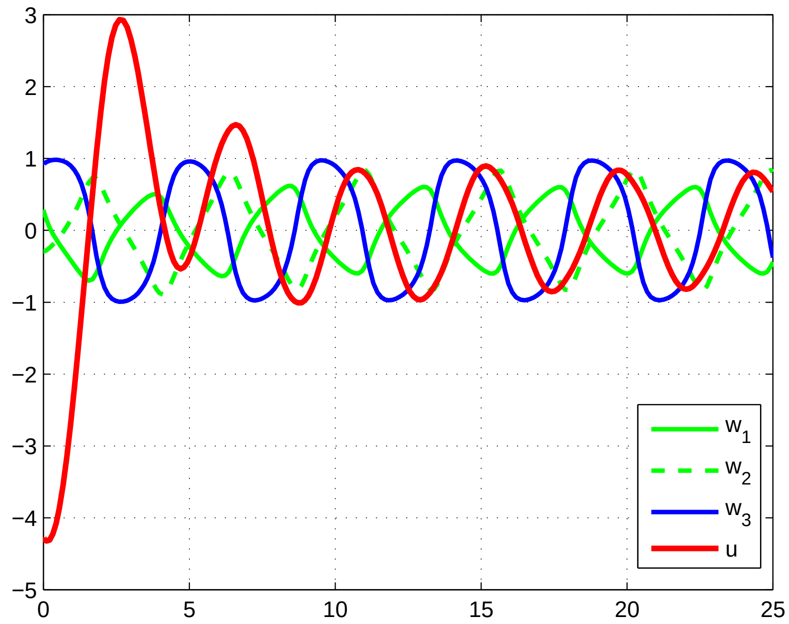


Рис. 5: Возмущения $w^*(t)$ и управление $u(t)$.

На рис. 5 представлены графики внешних возмущений $w_1^*(t)$, $w_2^*(t)$, $w_3^*(t)$ и управления $u(t)$.

Другие задачи

— Перерегулирование.

— Время установления.

— Область стабилизируемых начальных условий.

— ...

Будущие исследования

— Обобщение на нелинейные системы.

— Наибольшая область притяжения для нелинейной системы.

— ...

Выводы

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи подавления произвольных ограниченных внешних возмущений с помощью статической линейной обратной связи по состоянию и по выходу с использованием наблюдателя, а также задачи фильтрации. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов, который сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида для замкнутой динамической системы.

Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регулятора непосредственно свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации, легко решающихся численно.

В равной мере рассмотрен непрерывный и дискретный случаи, а также робастные варианты задач.