СИММЕТРИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА

В.Н. Пилишкин, МГТУ им. Н. Э. Баумана

О проблеме фазовых ограничений

Постановка задачи

$\dot{x}=Ax+Bu+Dv$, $x(t_0)=x_0$, $t \ge t_0$, **(1)**

x, u, v - n×n, m×1, r×1,

A, B, D - n×n, n×m, n×r.

Ограничения:

$\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, **(2)**

где $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{r}}$.

Необходимо, чтобы

$x=x(t)\in Q(t)$, $t \ge t_0$, **(3)**

где $Q=\{x \in R^n : \psi_i(x,t) \le 0, i \in \overline{1,\chi}\}$, **(4)**

$\psi_i(x,t)=(\alpha^i,x)-q_i(t)$,

α^i **- n×1 ,** q_i **- 1×1.**

Рассматривается стационарный случай.

Причем $\alpha^i \equiv const$, $q_i(t) = q_i \equiv const$, $i \in \overline{1, \chi}$.

Предполагается, что Q – симметричный относительно 0 $\in$ R^n параллелепипед, т.е.

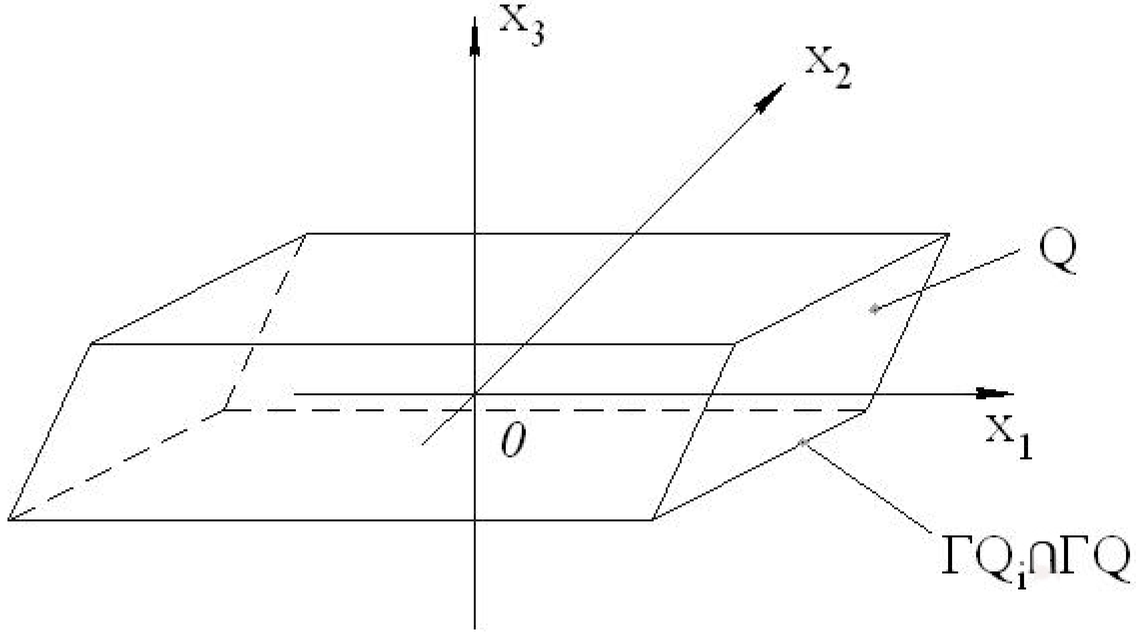

Рис. 1. Фазовый многогранник

Требуется:

выбрать

u = Ku,

y = Cx, **(5)**

K, C - m×l , l×n,

чтобы для системы (1) с учетом (2) обеспечивались ограничения (3).

Формирование достаточных условий разрешимости

Основные соотношения

$$(\nabla_x \Psi_i, f(x,u,v)) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \le 0$$

$$\forall x \in \Gamma Q \bigcap \Gamma Q_i,\ i \in \overline{1,\chi},\ t \ge t_0. \qquad \textbf{(6)}$$

Считаем, что $v \equiv 0$**. Тогда**

$$(\tilde{A}^T \alpha^i, M_\nu^i) - \dot{q}_i \le 0,$$

$$t \ge t_0,\ i \in \overline{1,\chi},\ \nu \in \overline{1,N_i}, \qquad \textbf{(7)}$$

где $\tilde{A} = A + BKC,$

M_ν^i **- ν-я вершина на i-ой грани** $\Gamma Q \cap \Gamma Q_i$,

N_i **- число вершин на i-ой грани.**

Для стационарного фазового параллелепипеда

$$(\tilde{A}^T \alpha^i, M_\nu^i) \le 0,\ t \ge t_0,$$

$$i \in \overline{1,n},\ \nu \in \overline{1,N},$$

$$N_i \equiv N = 2^{n-1}\ \forall i \in \overline{1,n}. \qquad \textbf{(8)}$$

Соотношения (8) можно рассматривать относительно произвольной $M_\nu^i = M$ **для пересекающихся в ней n граней.**

Приведение задачи к эквивалентному виду

Многогранник Q преобразуется к прямоугольному параллелепипеду $\overline{Q}$:

$$\mathbf{z = T\ x,} \tag{9}$$

T = Z X^{-1} - **(10)**

- матрица преобразования,

где X = [x^1 x^2… x^n] , Z = [$z^1 z^2$…z^n],

x^i, z^i, $i \in \overline{1,n}$, - оси симметрии Q и $\overline{Q}$

система (1) примет вид

$$\dot{z}=\overline{A}z+\overline{B}u+\overline{D}v, \tag{11}$$

$$\overline{A}=TAT^{-1},\ \overline{B}=TB,\ \overline{D}=TD,$$

$$u=Ky,\ \overline{y}=\overline{C}z,\ \overline{y}=\overline{C}z,\ \overline{C}=CT^{-1},$$

$$\widetilde{A}=\overline{A}+\overline{B}K\overline{C}\ .$$

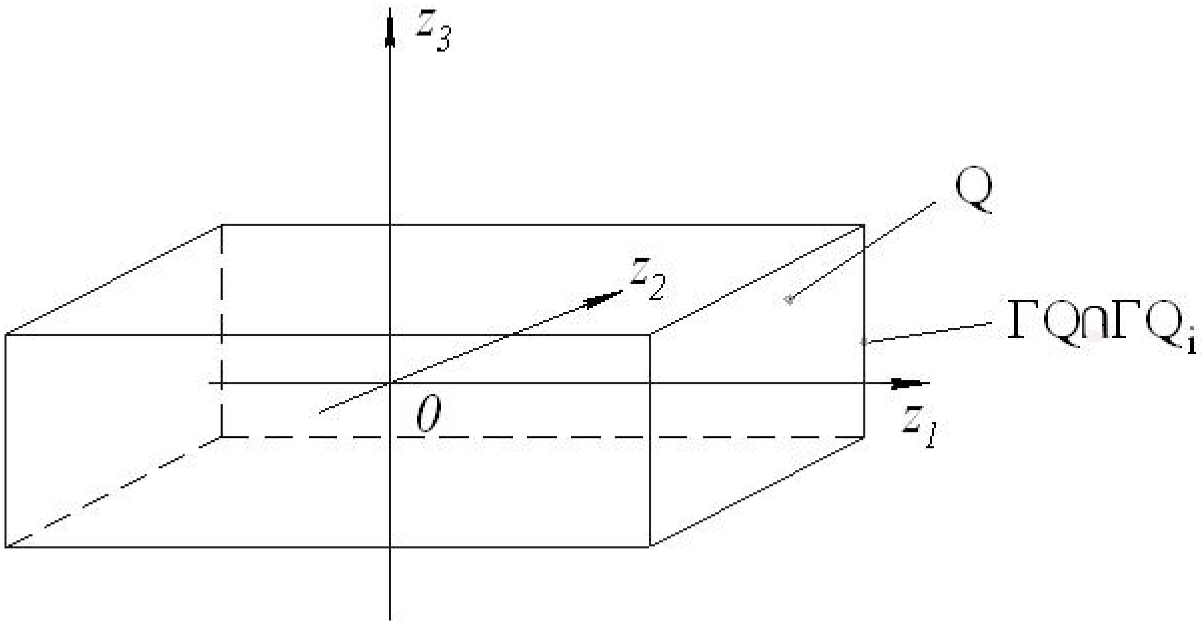

Рис. 2. Прямоугольный фазовый многогранник

Рассмотрим неравенства

$$(\tilde{A}^T \alpha^i, M_\nu^i) \le 0,\ \nu \in \overline{1,N}.$$

Отсюда

$$\tilde{A}^T \alpha^i \in K_i,\ i \in \overline{1,n}, \qquad \textbf{(12)}$$

где K_i **- конус, образованный гиперплоскостями,**

ортогональными векторам $M_\nu^i,\ \nu \in \overline{1,N}.$

Для i-той грани $\Gamma Q \bigcap \Gamma Q_i$, **:**

$$M_\nu^i = [\pm m_1 \ldots \pm m_{i-1} m_i \pm m_{i+1} \ldots \pm m_n]^T.$$

Тогда при $m_i < 0$

$$K_i = \{x \in R^n : x_i \ge \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} (\pm m_j) x_j\} \qquad \textbf{(13)}$$

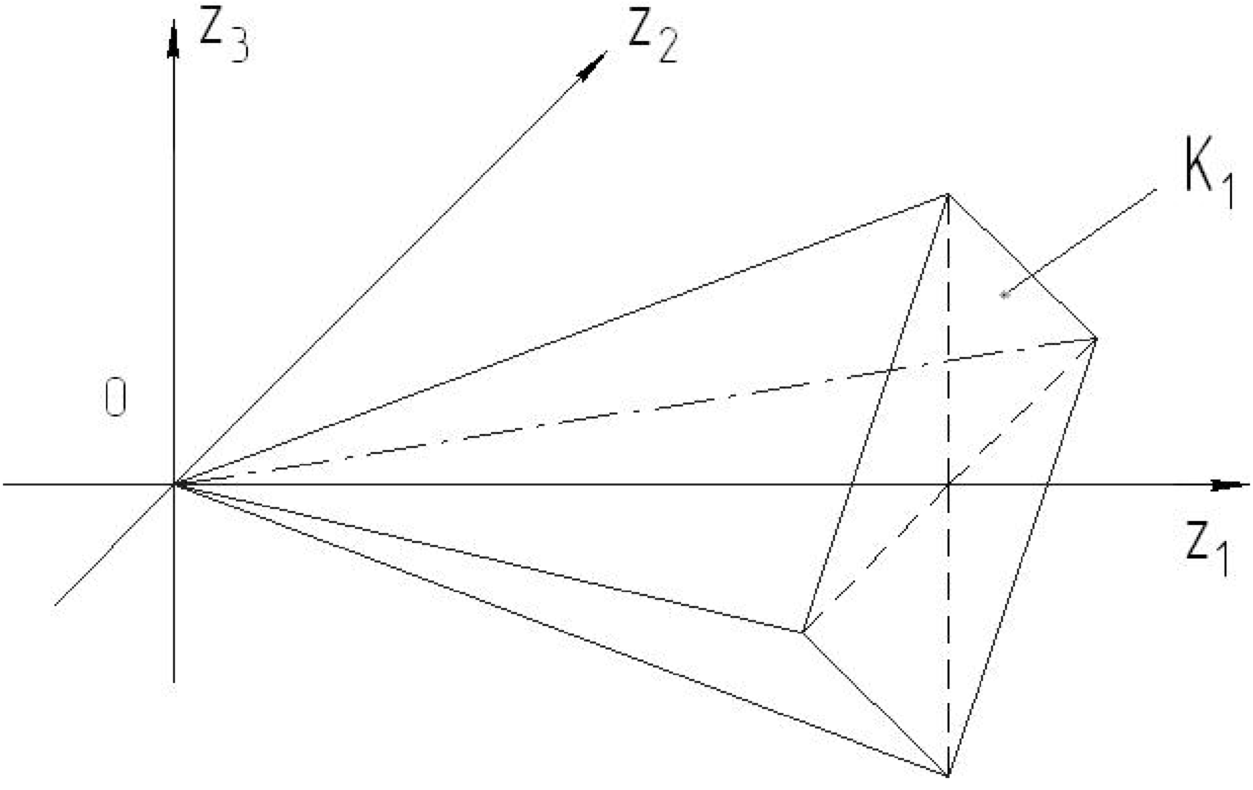

Рис. 3. Конус K_1 с осью симметрии OZ_1

Поскольку

$$\alpha^{\mathrm{i}}=[\underbrace{0\ldots0}_{\mathrm{i-1}}\ \text{-}1\ \underbrace{0\ldots0}_{\mathrm{n-1}}]^{\mathrm{T}},$$

то (12) приводится к виду

$$-(\overline{a}_i+\overline{C}^T K^T \overline{b}_i)\in K_i,\quad i\in\overline{1,n}. \qquad \textbf{(14)}$$

Решение задачи синтеза

$$\overline{K}^T \overline{b}_i \in \overline{a}_i + K_i,\quad i\in\overline{1,n}, \qquad \textbf{(15)}$$

где $K^T = -C^T K^T$.

Очевидно, $\forall \varphi^i \in K_i$

$$\varphi^i = P_i s^i, \qquad \textbf{(16)}$$

где $s^i \ge 0$ **- N×1 вектор,**

$P_i=[p^i_1 p^i_2 \ldots p^i_N]$ **- n×N матрица,**

$p^i_\nu,\quad \nu\in\overline{1,N}$ **- ребра конуса** K_i**.**

Из (15) получим

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\overline{k}_j = \overline{a}_i + P_i s^i,\quad i\in\overline{1,n}. \qquad \textbf{(17)}$$

Введем обозначения

$$\tilde{k}=[\bar{k}_1^T\,\bar{k}_2^T\ldots\bar{k}_m^T]^T\ -(n\cdot m)\times 1,$$

$$a=[(\bar{a}^1)^T(\bar{a}^2)^T\ldots(\bar{a}^n)^T]^T\ -n^2\times 1,$$

$$p=[(p_1^1,s^1)\ldots(p_1^n,s^n)\ldots(p_n^1,s^1)\ldots(p_n^n,s^n)]^T\ -n^2\times 1,$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}\bar{B} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \bar{B} & \ldots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \bar{B}\end{bmatrix}\quad -\quad n^2\times(nm),$$

где $\bar{k}_j$, $\bar{a}^i$ **- вектор-столбцы матриц** $\bar{K}$, $\bar{A}$**,**

p_ξ^i **- вектор-строка матрицы** P_i**.**

Тогда (17) принимает вид

$$\tilde{B}\tilde{k}=a+p(s). \qquad \textbf{(18)}$$

Для разрешимости требуется

$$a+p(s)\in L(\tilde{B})$$

или

$$\rho(a+p(s),L(\tilde{B}))=0 \qquad \textbf{(19)}$$

Первый метод решения

Пусть

$$\hat{B}=[\hat{b}_1\hat{b}_2\ldots\hat{b}_{\widetilde{m}}],$$

где $\{\hat{b}_\nu\}_{\nu=1}^{\widetilde{m}}$ **- базис** $L(\widetilde{B})$**.**

Тогда

$$\rho(\cdot)=\left\| \hat{a}-\hat{a}^0 \right\|,$$

где $\hat{a}=a+p(s),$

$\hat{a}^0=\hat{B}(\hat{B}^T\hat{B})^{-1}\hat{B}^T\hat{a}=F\hat{a}$ **- ортогональная проекция** $\hat{a}$ **на** $L(\widetilde{B})$**.**

Решаем задачу

$$\min_{\substack{s^i\geq 0\\ i\in\overline{1,n}}} \left\| (E-F)(a+p(s^1,s^2,\ldots,s^n)) \right\|^2=0 \qquad \textbf{(20)}$$

или

$$\nabla_{\substack{s^i\\ i\in\overline{1,n}}} p^2(\cdot)=0,\quad s^i\geq 0. \qquad \textbf{(21)}$$

Использование «усечённых» конусов для сокращения размерности задачи

2 метод решения

Пусть

$a^0 = \hat{B}(\hat{B}^T \hat{B})^{-1} \hat{B} a = Fa$ **- ортогональная проекция** a **на** $L(\widetilde{B})$**.**

Сформируем $n^2 \times (N \cdot n)$ **матрицу** P **и** $(N \cdot n) \times 1$ **вектор** S**:**

$S = [(S^1)^T (S^2)^T \ldots (S^n)^T]^T$ **;**

$$P = \begin{bmatrix} p_1^1, & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_1^2, & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_1^n, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n^1, & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_1^2, & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n^n \end{bmatrix} = \left[p_1 p_2 \cdots p_{\widetilde{N}} \right],$$

$\widetilde{N} = N \cdot n,\ \ p_i - n^2 \times 1$ **вектор-столбец,** 0 **- нулевой** $1 \times N$ **вектор.**

Представим P **в виде**

$P = P_0 + \overline{P},$

где матрицы $P_0, \overline{P}$ **содержат столбцы соответственно**

принадлежащие $L(\widetilde{B})$ **и ортогональные** $L(\widetilde{B})$**.**

Очевидно, $p(s) = Ps$**.**

Тогда для разрешимости задачи синтеза требуется

$$(a - a^0) + \overline{P}s = (E - F)a + \overline{P}s = 0\,, \quad s \geq 0 \qquad \textbf{(22)}$$

Согласно (22) вектор $(F - E)a$ должен принадлежать одному из конусов, образованных столбцами матрицы $\overline{P}$.

Для разрешимости (22) достаточно, чтобы столбцы матрицы $\overline{P}$ не принадлежали одному полупространству.

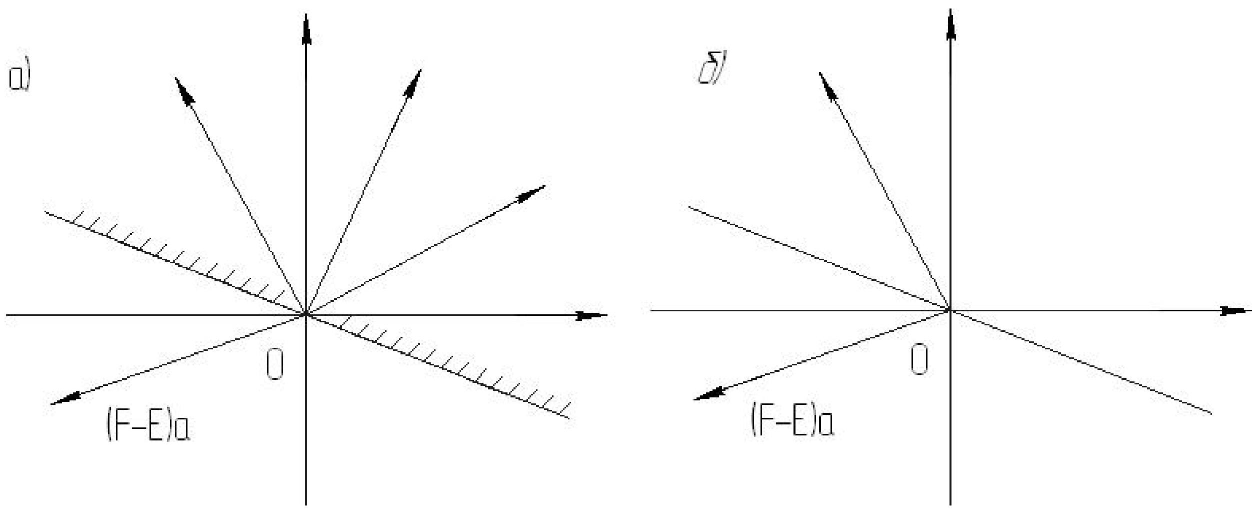

Рис. 4. Условие разрешимости (22)

Необходимым и достаточным условием неразрешимости (22) является существование гиперплоскости, разделяющей вектор $(F - E)a$ и столбцы матрицы $\overline{P}$.

<u>Синтез при действии возмущений и нестационарных ограничениях.</u>

Пусть

$q_i(t)=\text{var} \quad \forall i\in\overline{1,n};$

$\text{v}=[\text{v}_1 \ldots \text{v}_r]^T \neq 0.$

Соотношения (6) принимают вид

$$(\tilde{A}^T\alpha^i, M_\nu^i) \leq \delta_i\,, \quad t \geq t_0\,,$$
$$i\in\overline{1,n}\,, \quad \nu\in\overline{1,N}\,, \qquad \textbf{(23)}$$
$$\delta_i=\dot{q}_i-(D^T\alpha^i, \text{v}).$$

Отсюда получим

$$\tilde{A}^T\alpha^i \in \frac{\delta_i}{m_i}e_i+K_i\,, \; i\in\overline{1,n}, \qquad \textbf{(24)}$$

$$e_i=[\underbrace{0\ldots0\;1}_{i}\;0\ldots0]^T.$$

Или

$$\overline{K}^T\overline{b}_i \in \frac{\delta_i}{m_i}e_i+\overline{a}_i+K_i\,, \qquad \textbf{(25)}$$
$$i\in\overline{1,n},$$

где

$$\delta_i=\dot{q}_i+(d_i, \text{v}), \qquad \textbf{(26)}$$

d_i **- i-я вектор-строка матрицы D.**

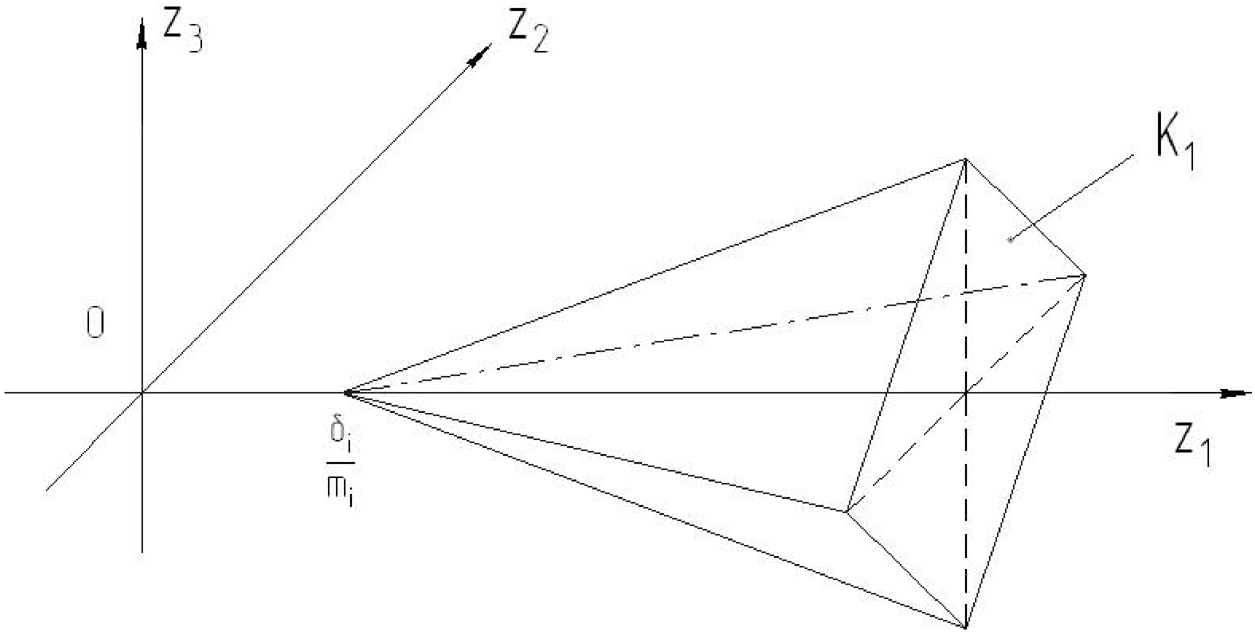

Рис. 5. Смещенный конус K_1

Отсюда получим

$$\tilde{B}\tilde{k} = \Delta + a + Ps, \tag{27}$$

где

$$d_i\Delta = [\frac{\delta_1}{m_1}e_1^T \quad \frac{\delta_2}{m_2}e_2^T \ \dots \ \frac{\delta_n}{m_n}e_n^T]^T - n^2 \times 1.$$

Пусть

$$\Delta = \Delta^0 + \overline{\Delta},$$

где $\Delta^0 \in L(\tilde{B}), \quad \overline{\Delta} \perp L(\tilde{B}).$

Тогда синтез робастного регулятора основан на соотношениях

$$\begin{gathered} \tilde{B}\tilde{k} = \Delta^0 + a^0 + P_0 s, \\ (E-F)(a+\Delta) + \overline{P}s = 0, \\ s \ge 0, \quad \Delta \in \Omega. \end{gathered} \tag{28}$$